Mathematik

Name:	
Klasse:	Datum:

Substitution

Substitution eines Teilterms (Typ 1)

Beispiel 1

Gesucht ist die Stammfunktion von $f(x) = (5x+1)^3$.

$$\text{(1)} \quad \underbrace{z := g(x) = 5x+1}_{\text{Substituiere}} \Leftrightarrow \underbrace{z' = g'(x) = \frac{dz}{dx} = 5}_{\text{Differenziere}} \Leftrightarrow \underbrace{dx = \frac{1}{5}\,dz}_{\text{Stelle um}}$$

$$\text{(2)} \quad F(x) = \int (5x+1)^3\,dx \underset{\text{Substituiere}}{=} \int z^3 \cdot \frac{1}{5}\,dz \underset{\text{Integriere}}{=} \frac{1}{4} z^4 \cdot \frac{1}{5} + C = \frac{1}{20} z^4 + C \underset{\text{Resubstituiere}}{=} \frac{1}{20}(5x+1)^4 + C$$

Beispiel 2

Gesucht ist die Stammfunktion von $f(x) = (5x^2+1)^3 \cdot 10x$.

$$\text{(1)} \quad \underbrace{z := g(x) = 5x^2+1}_{\text{Substituiere}} \Leftrightarrow \underbrace{z' = g'(x) = \frac{dz}{dx} = 10x}_{\text{Differenziere}} \Leftrightarrow \underbrace{dx = \frac{1}{10x}\,dz}_{\text{Stelle um}}$$

$$\text{(2)} \quad F(x) = \int (5x^2+1)^3 \cdot 10x\,dx \underset{\text{Substituiere}}{=} \int z^3 \cdot 10x \cdot \frac{1}{10x}\,dz = \int z^3\,dz \underset{\text{Integriere}}{=} \frac{1}{4} z^4 + C \underset{\text{Resubstituiere}}{=} \frac{1}{4}\left(5x^2+1\right)^4 + C$$

Beispiel 3

Gesucht ist die Stammfunktion von $f(x) = \cos(5x^2) \cdot 6x$.

$$\text{(1)} \quad \underbrace{z := g(x) = 5x^2}_{\text{Substituiere}} \Leftrightarrow \underbrace{z' = g'(x) = \frac{dz}{dx} = 10x}_{\text{Differenziere}} \Leftrightarrow \underbrace{dx = \frac{1}{10x}\,dz}_{\text{Stelle um}}$$

$$\text{(2)} \quad F(x) = \int \cos\left(5x^2\right) \cdot 6x\,dx \underset{\text{Substituiere}}{=} \int \frac{\cos(z) \cdot 6x}{10x}\,dz = \int \frac{6}{10} \cos(z)\,dz \underset{\text{Integriere}}{=} \frac{6}{10} \sin(z) + C \underset{\text{Resubstituiere}}{=} \frac{3}{5} \sin\left(5x^2\right) + C$$

Diese Form der Substitution funktioniert nur, wenn zu integrierende Funktion f(x) (bis auf konstante Werte) die Form $f(x) = a(\,i(x)\,) \cdot i'(x)$ aufweist. Dann gilt nämlich: $F(x) = \int a(\,i(x)\,) \cdot i'(x)\,dx = \int a(z)\,dz = A(z)$.

Name:	
Klasse:	Datum:

Mathematik

Substitution

Aufgaben

Bestimme jeweils die Stammfunktion mit Hilfe der angegebenen Substitution vom Typ 1.

1.1 $f(x) = \cos(2x+3)$ Substitution: $z = 2x+3$

1.2 $f(x) = \left(\frac{1}{5}x+5\right)^4$ Substitution: $z = \frac{1}{5}x+5$

1.3 $f(x) = 12x^2 \cdot e^{x^3}$ Substitution: $z = x^3$

1.4 $f(x) = \frac{x^3}{x^8+2x^4+1}$ Substitution: $z = x^4+1$

1.5 $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+8}}$ Substitution: $z = x^2+8$

1.6 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ Substitution: $z = a^2-x^2$

1.7 $f(x) = \sin(x)\cdot\cos^2(x)$ Substitution: $z = \cos(x)$

1.8 $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}$ Substitution: $z = \cos(x)$

1.9 $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$ Substitution: $z = \tan(x)$

Tipp: Verwende den „Trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$.

Zwischenübungen

Die Ergebnisse der Zwischenübungen werden in den nachfolgenden Ausführungen und Aufgaben benötigt. Sie können aber auch verwendet werden, ohne sie nachzurechnen!

2.1 Zeige unter Verwendung des „Trigonometrischen Pythagoras“, dass $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

2.2 Zeige, dass $F(x) = \frac{1}{2}(\sin(x)\cdot\cos(x)+x)$ die Stammfunktion von $f(x)=\cos^2(x)$ ist.

Verwende hierfür die Partielle Integration (Produktintegration)!

2.3 Zeige durch implizites Differenzieren, dass $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ die Ableitung von $f(x)=\arcsin(x)$ ist.

2.4 Zeige $a^{\ln(b)} = b^{\ln(a)}$.

Name:	
Klasse:	Datum:

Mathematik

Substitution

Substitution der Integrationsvariablen (Typ 2)

Leider liegt die zu integrierende Funktion in der Regel nicht in der Typ-1-Form $f(x) = a(\,i(x)\,) \cdot i'(x)$ vor. Dann kann man eine Typ-2-Substitution versuchen, bei der die Integrationsvariable x selbst durch einen Term t(z) substituiert wird, so dass das Integral $\int f(x)\,dx$ in ein hoffentlich leichter lösbares Integral $\int f(\,t(z)\,) \cdot t'(z)\,dz$ transformiert wird. Dabei ist man nicht an eine bestimmte Substitution gebunden, sondern kann mit beliebigen Termen experimentieren. Sinnvollerweise wählt man diesen jedoch so, dass ein unangenehmer Teil des Integrals (wie z.B. einen Wurzel) wegfällt. Beliebte Substitutionsterme sind $x = z^2$, $x = \frac{1}{z}$ und - wegen des Trigonometrischen Pythagoras - $x = \sin(z)$.

Beispiel 4

Gesucht sind die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(1) <u>Substituiere</u> <u>Differenziere</u> <u>Stelle um</u>

$$x = \sin(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dz} = \cos(z) \quad \Leftrightarrow \quad dx = \cos(z)\,dz$$

(2) <u>Stelle um für Rücksubstitution</u>

$$x = \sin(z) \quad \Leftrightarrow \quad z = \arcsin(x)$$

(3) <u>Substituiere</u> <u>Integriere</u> <u>Resubstituiere</u>

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(z)}} \cdot \cos(z)\,dz = \int \frac{\cos(z)}{\sqrt{\cos^2(z)}}\,dz = \int 1\,dz = z = \arcsin(x)$$

Bestimmte Integrale berechnen

Um bestimmte Integrale zu berechnen, bestimmt man zunächst die Stammfunktion mittels Substitution und verwendet diese dann mit Integrationsgrenzen.

Beispiel 5

Gesucht sind die Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (Halbkreis über der x-Achse mit Radius 1) und dessen Flächeninhalt. Aus Aufgabe 3.1 ergibt sich:

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Mathematik

Name:	
Klasse:	Datum:

Substitution

Aufgaben

Bestimme jeweils die Stammfunktion mit Hilfe der angegebenen Substitution vom Typ 2.
Der Ergebnisse der Aufgaben 2.1 bis 2.4 können dabei sehr nützlich für die Umformungen sein!

3.1 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ Substitution: $x = \sin(z)$

3.2 $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ Substitution: $x = 3\sin(z)$

3.3 $f(x) = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$ Substitution: $x = \arcsin(z)$

3.4 $f(x) = a^x \cdot e^x$ Substitution: $x = \ln(z)$ Beachte: e^x und $\ln(x)$ heben sich auf!

3.5 $f(x) = e^{e^x + x}$ Substitution: $x = \ln(z)$ Beachte: e^x und $\ln(x)$ heben sich auf!

3.6 $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ Substitution: $x = e^z$ Beachte: e^x und $\ln(x)$ heben sich auf!

3.7 $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ Substitution: $x = e^z$ Beachte: e^x und $\ln(x)$ heben sich auf!

3.8 $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ Substitution: $x = z-1$ Beachte: $x = z-1 \Leftrightarrow z = x+1$

3.9 $f(x) = \sin\left(\sqrt{x-1}\right)$ Substitution: $x = z^2+1$ Beachte: $x = z^2+1 \Rightarrow z = \sqrt{x-1}$

3.10 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ Substitution: $x = 1-z^2$ Beachte: $x = 1-z^2 \Rightarrow z = \sqrt{1-x}$

3.11 $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$ Substitution: $x = \frac{1}{z}$

3.12 $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ Substitution: $x = \frac{z-1}{z+1}$

3.13 $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}+1}$ Substitution: $x = (z-1)^2$ Beachte: $x = (z-1)^2 \Rightarrow z = \sqrt{x}+1$

Substitution

Name:	
Klasse:	Datum:

Lösungen zu den Aufgaben

Aufgabe 1.1

(1) $z = 2x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{2}\,dz$

(2) $F(x) = \int \cos(2x+3)\,dx = \int \cos(z) \cdot \frac{1}{2}\,dz = \frac{1}{2}\sin(z) + c = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C$

Aufgabe 1.2

(1) $z = \frac{1}{5}x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad dx = 5\,dz$

(2) $F(x) = \int \left(\frac{1}{5}x + 5\right)^4 dx = \int z^4 \cdot 5\,dz = \frac{1}{5}z^5 \cdot 5 + C = z^5 + C = \left(\frac{1}{5}x + 5\right)^5 + C$

Aufgabe 1.3

(1) $z = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{3x^2}\,dz$

(2) $F(x) = \int 12x^2 \cdot e^{x^3}\,dx = \int 12x^2 \cdot e^z \cdot \frac{1}{3x^2}\,dz = \int 4\,e^z\,dz = 4\,e^z + C = 4\,e^{x^3} + C$

Aufgabe 1.4

(1) $z = x^4 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 4\,x^3 \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{4\,x^3}\,dz$

(2) $F(x) = \int \frac{x^3}{x^8 + 2x^4 + 1}\,dx = \int \frac{x^3}{\left(x^4+1\right)^2}\,dx = \int \frac{x^3}{z^2} \cdot \frac{1}{4\,x^3}\,dz = \int \frac{1}{4\,z^2}\,dz = -\frac{1}{4\,z} + C == -\frac{1}{4\left(x^4+1\right)} + C$

Aufgabe 1.5

(1) $z = x^2 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{2x}\,dz$

(2) $F(x) = \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+8}}\,dx = \int \frac{2x}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{2x}\,dz = \int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = -2\sqrt{z} + C = -2\sqrt{x^2+8} + C$

Aufgabe 1.6

(1) $z = a^2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = -\frac{1}{2x}\,dz$

(2) $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{z}}\left(-\frac{1}{2x}\right)dz = \int -\frac{1}{2\sqrt{z}}\,dz = \sqrt{z} + C = \sqrt{a^2-x^2} + C$

Aufgabe 1.7

(1) $z = \cos(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \sin(x) \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{\sin(x)}\,dz$

(2) $F(x) = \int \sin(x) \cdot \cos^2(x)\,dx = \int \sin(x) \cdot z^2 \cdot \frac{1}{\sin(x)}\,dz = \int z^2\,dz = \frac{1}{3}z^3 + C = \frac{1}{3}\cos^3(x) + C$

Name:	
Klasse:	Datum:

Substitution

Aufgabe 1.8

(1) $z=\cos(x) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dz}{dx}=\sin(x) \quad\Leftrightarrow\quad dx=\frac{1}{\sin(x)}\,dz$

(2) $F(x)=\int\frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}\,dx=\int\frac{\sin(x)}{z^4}\cdot\frac{1}{\sin(x)}\,dz=\int\frac{1}{z^4}\,dz=-\frac{1}{3z^3}+C=-\frac{1}{3\cos^3(x)}+C$

Aufgabe 1.9

(1) $z=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dz}{dx}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)} \quad\Leftrightarrow\quad dx=\cos^2(x)\,dz$

(2) Aus $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ folgt außerdem $\sin(x)=\cos(x)\cdot\tan(x)$.

(3) $F(x)=\int\frac{1}{\sin^2(x)}\,dx=\int\frac{1}{\cos^2(x)\cdot\tan^2(x)}\,dx=\int\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)\cdot z^2}\,dz=\int\frac{1}{z^2}\,dz=-\frac{1}{z}+C=-\frac{1}{\tan(x)}+C$

Aufgabe 2.1

$\sin^2(z)+\cos^2(z)=1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos^2(z)=1-\sin^2(z)$

$\Rightarrow\quad \cos^2(\arcsin(x))=1-\sin^2(\arcsin(x))=1-x^2 \quad\Rightarrow\quad \cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$

Aufgabe 2.2

$\int\cos^2(x)\,dx=\int\cos(x)\cdot\cos(x)\,dx=\sin(x)\cdot\cos(x)-\int\sin(x)\cdot(-\sin(x))\,dz=\sin(x)\cdot\cos(x)+\int\sin^2(x)\,dz$

$=\sin(x)\cdot\cos(x)+\int 1-\cos^2(x)\,dz=\sin(x)\cdot\cos(x)+x-\int\cos^2(x)\,dz$

$\Leftrightarrow\quad 2\int\cos^2(x)\,dx=\sin(x)\cdot\cos(x)+x \quad\Leftrightarrow\quad F(x)=\int\cos^2(x)\,dx=\frac{1}{2}(\sin(x)\cdot\cos(x)+x)$

Aufgabe 2.3

(1)	y definieren:	$y:=f(x)=\arcsin(x)$	
(2)	Sinus anwenden:	$\sin(y)=\sin(\arcsin(x))=x$	
(3)	Nach x ableiten:	$\cos(y)\cdot y'=1$	(Kettenregel!)
(4)	Nach y' auflösen:	$y'=\frac{1}{\cos(y)}$	
(5)	Termumformungen:	$y'=\frac{1}{\sqrt{\cos^2(y)}}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}$	
(6)	y einsetzen:	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

Aufgabe 2.4

$a^{\ln(b)}=\left(e^{\ln(a)}\right)^{\ln(b)}=e^{\ln(a)\cdot\ln(b)}=e^{\ln(b)\cdot\ln(a)}=\left(e^{\ln(b)}\right)^{\ln(a)}=b^{\ln(a)}$

Mathematik

Name:	
Klasse:	Datum:

Substitution

Aufgabe 3.1

(1) $x = \sin(z) \iff \frac{dx}{dz} = \cos(z) \iff dx = \cos(z)\,dz$

(2) $x = \sin(z) \iff z = \arcsin(x)$

(3) $F(x) = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2(z)}\cdot\cos(z)\,dz = \int \sqrt{\cos^2(z)}\cdot\cos(z)\,dz = \int \cos^2(z)\,dz$

$$\overset{2.2}{=} \frac{1}{2}(\sin(z)\cdot\cos(z)+z)+C = \frac{1}{2}(\sin(\arcsin(x))\cdot\cos(\arcsin(x))+\arcsin(x))+C$$

$$\overset{2.1}{=} \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)\right)+C$$

Aufgabe 3.2

(1) $x = 3\sin(z) \iff \frac{dx}{dz} = 3\cos(z) \iff dx = 3\cos(z)\,dz$

(2) $x = 3\sin(z) \iff z = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$

(3) $F(x) = \int \sqrt{9-x^2}\,dx = \int \sqrt{9-9\sin^2(z)}\cdot 3\cos(z)\,dz = \int \sqrt{9\cdot\left(1-\sin^2(z)\right)}\cdot 3\cos(z)\,dz$

$$= \int \sqrt{9\cdot\cos^2(z)}\cdot 3\cos(z)\,dz = \int 3\cos(z)\cdot 3\cos(z)\,dz = 9\int \cos^2(z)\,dz \overset{2.1}{=} \frac{9}{2}(\sin(z)\cdot\cos(z)+z)$$

$$= \frac{9}{2}\left(\sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right)\cdot\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right)+\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right)+C$$

$$\overset{2.2}{=} \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-x^2}+\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right)+C$$

$$= \frac{3}{2}\left(x\cdot\sqrt{1-x^2}+3\cdot\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right)+C$$

Aufgabe 3.3

(1) $x = \arcsin(z) \iff \frac{dx}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \iff dx = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$

(2) $x = \arcsin(z) \iff z = \sin(x)$

(3) $F(x) = \int \cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx = \int \cos(\arcsin(z))\cdot e^{\sin(\arcsin(z))}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz \overset{2.3}{=} \int \sqrt{1-z^2}\cdot e^z\cdot\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$

$$= e^z + C = e^{\sin(x)} + C$$

Mathematik

Name:	
Klasse:	Datum:

Substitution

Aufgabe 3.4

(1) $x = \ln(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{z}\,dz$

(2) $x = \ln(z) \quad \Leftrightarrow \quad z = e^x$

(3) $F(x) = \int a^x \cdot e^x\,dx = \int a^{\ln(z)} \cdot e^{\ln(z)} \cdot \frac{1}{z}\,dz = \int a^{\ln(z)} \cdot z \cdot \frac{1}{z}\,dz = \int a^{\ln(z)}\,dz \overset{2,4}{=} \int z^{\ln(a)}\,dz = \frac{1}{\ln(a)+1} \cdot z^{\ln(a)+1} + C$

$= \frac{z^{\ln(a)+1}}{\ln(a)+1} + C = \frac{\left(e^x\right)^{\ln(a)+1}}{\ln(a)+1} + C = \frac{e^{x.|\ln(a)+1|}}{\ln(a)+1} + C = \frac{e^{x\cdot\ln(a)+x}}{\ln(a)+1} + C = \frac{e^{x\cdot\ln(a)} \cdot e^x}{\ln(a)+1} + C = \frac{a^x \cdot e^x}{\ln(a)+1} + C$

Aufgabe 3.5

(1) $x = \ln(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{z}\,dz$

(2) $x = \ln(z) \quad \Leftrightarrow \quad z = e^x$

(3) $F(x) = \int e^{e^x + x}\,dx = \int \frac{e^{e^{\ln(z)} + \ln(z)}}{z}\,dz = \int \frac{e^z \cdot e^{\ln(z)}}{z}\,dz = \int \frac{e^z \cdot z}{z}\,dz = \int e^z\,dz = e^z + C = e^{e^x} + C$

Aufgabe 3.6

(1) $x = e^z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dz} = e^z \quad \Leftrightarrow \quad dx = e^z\,dz$

(2) $x = e^z \quad \Leftrightarrow \quad z = \ln(x)$

(3) $F(x) = \int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int \frac{1}{e^z\,\ln(e^z)} \cdot e^z\,dz = \int \frac{1}{z}\,dz = \ln(z) + C = \ln(\ln(x)) + C$

Aufgabe 3.7

(1) $x = e^z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dz} = e^z \quad \Leftrightarrow \quad dx = e^z\,dz$

(2) $x = e^z \quad \Leftrightarrow \quad z = \ln(x)$

(3) $F(x) = \int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \int \frac{\ln(e^z)}{(e^z)^2} \cdot e^z\,dz = \int \frac{z}{e^z}\,dz = -\frac{z}{e^z} + \int \frac{1}{e^z}\,dz + C = -\frac{z}{e^z} - \frac{1}{e^z} + C$

$= -\frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} - \frac{1}{e^{\ln(x)}} + C = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln(x)+1}{x} + C$

Name:

Klasse: Datum:

Mathematik

Substitution

Aufgabe 3.8

(1) $x = z - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dz} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad dx = dz$

(2) $x = z - 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = x + 1$

(3) $F(x) = \int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{2}{(z-1+1)^2}\,dz = \int \frac{2}{z^2}\,dz = -\frac{2}{z} + C = -\frac{2}{x+1} + C$

Aufgabe 3.9

(1) $x = z^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dz} = 2z \quad \Leftrightarrow \quad dx = 2z\,dz$

(2) $x = z^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{x-1}$

(3) $F(x) = \int \sin\left(\sqrt{x-1}\right)dx = \int \sin\left(\sqrt{z^2+1-1}\right)\cdot 2\,z\,dz = \int 2\,z \cdot \sin(z)\,dz = -2\,z\cos(z) + 2\int \cos(z)\,dz + C$

$= -2\,z\cos(z) + 2\sin(z) + C = -2\sqrt{x-1}\cos(\sqrt{x-1}) + 2\sin(\sqrt{x-1}) + C$

Aufgabe 3.10

(1) $x = 1 - z^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dz} = -2z \quad \Leftrightarrow \quad dx = -2z\,dz$

(2) $x = 1 - z^2 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{1-x}$

(3) $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{1-z^2}{\sqrt{1-\left(1-z^2\right)}}\cdot(-2\,z)\,dz = \int \frac{2\,z^3 - 2\,z}{\sqrt{z^2}}\,dz = 2\int z^2 - 1\,dz = 2\cdot\left(\frac{1}{3}z^3 - z\right) + C$

$= \frac{2}{3}z\cdot\left(z^2 - 3\right) + C = \frac{2}{3}\sqrt{1-x}\cdot\left(\sqrt{1-x}^{\,2} - 3\right) + C = \frac{2}{3}\sqrt{1-x}\cdot(1-x-3) + C = -\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x} + C$

Aufgabe 3.11

(1) $x = \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dz} = -\frac{1}{z^2} \quad \Leftrightarrow \quad dx = -\frac{1}{z^2}\,dz$

(2) $x = \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{x}$

(3) $F(x) = \int \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{z}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1}}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz = -\int \frac{z}{z^2\cdot\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}}\,dz = -\int \frac{1}{z\cdot\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}}\,dz$

$= -\int \frac{1}{\sqrt{z^2\cdot\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}}\,dz = -\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz \overset{2.3}{=} -\arcsin(z) + C = -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + C$

Substitution

Aufgabe 3.12

(1) $x=\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{dx}{dz}=\frac{2}{(z+1)^2} \Leftrightarrow dx=\frac{2}{(z+1)^2}dz$

(2) $x=\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow x(z+1)=z-1 \Leftrightarrow xz+x=z-1 \Leftrightarrow xz-z=-1-x \Leftrightarrow z(x-1)=-(1+x)$

$\Leftrightarrow z=-\frac{1+x}{x-1}=\frac{1+x}{1-x}$

(3) $F(x)=\int\frac{2}{x^2-1}dx=\int\frac{2}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2-1}\cdot\frac{2}{(z+1)^2}dz=\int\frac{2}{\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}-\frac{(z+1)^2}{(z+1)^2}}\cdot\frac{2}{(z+1)^2}dz$

$=\int\frac{2}{\frac{(z-1)^2-(z+1)^2}{(z+1)^2}}\cdot\frac{2}{(z+1)^2}dz=\int\frac{2(z+1)^2}{(z-1)^2-(z+1)^2}\cdot\frac{2}{(z+1)^2}dz=\int\frac{4}{(z-1)^2-(z+1)^2}dz$

$=\int\frac{4}{(z^2-2z+1)-(z^2+2z+1)}dz=\int\frac{4}{-4z}dz=-\int\frac{1}{z}dz=-\ln(z)+C=-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+C$

Aufgabe 3.13

(1) $x=(z-1)^2 \Leftrightarrow \frac{dx}{dz}=2(z-1)=2z-2 \Leftrightarrow dx=(2z-2)dz$

(2) $x=(z-1)^2 \Rightarrow z=\sqrt{x}+1$

(3) $F(x)=\int\sqrt{\sqrt{x}+1}\,dx=\int\sqrt{z}\,(2z-2)dz=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\cdot(2z-2)-\int\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\cdot 2\,dz+C$

$=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\cdot(2z-2)-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}+C=\frac{10}{15}\sqrt{z^3}\cdot(2z-2)-\frac{8}{15}\sqrt{z^5}+C=\frac{20}{15}z\sqrt{z^3}-\frac{20}{15}\sqrt{z^3}-\frac{8}{15}z\sqrt{z^3}+C$

$=\frac{4}{15}\sqrt{z^3}\cdot(5z-5-2z)+C=\frac{4}{15}\sqrt{z^3}\cdot(3z-5)+C=\frac{4}{15}\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}\cdot\left(3\left(\sqrt{x}+1\right)-5\right)+C$

$=\frac{4}{15}\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}\cdot\left(3\sqrt{x}-2\right)+C$