Name:	
Klasse:	Datum:

Mathematik

Rechnen mit Wurzeln

Was sind Wurzeln?

Wurzeln sind Rechenoperatoren, die das Potenzieren zurücknehmen.

Beispiele: $\sqrt[2]{64} = 8$, denn $8^2 = 64$

$\sqrt[3]{125} = 5$, denn $5^3 = 125$

$\sqrt[10]{1024} = 2$, denn $2^{10} = 1024$

Die Zahl unter der Wurzel heißt **Radikand**, die Zahl auf der Wurzel heißt **Wurzelexponent**. Bei der zweiten Wurzel (also der Umkehrung des Quadrierens) lässt man die 2 beim Wurzelsysmbol weg.

Der Radikand muss keine Zahl sein, auch Variablen sind möglich.

Beispiel: $\sqrt{x^2} = x$

Rechenregeln für Wurzeln

1. Wurzeln werden multipliziert/dividiert, in dem man die Radikanden multipliziert/dividiert.

   Beispiel: $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36}$ bzw. $\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\dfrac{144}{9}} = \sqrt{16}$

2. Wurzeln können nicht addiert oder subtrahiert werden.

   Beispiel: $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, aber $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

3. Wurzeln mit gleichen Radikanden können zusammengefasst werden.

   Beispiel: $2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

4. Wurzeln mit unterschiedlichen lassen sich <u>nicht</u> zusammenfassen!

   Beispiel: $\sqrt[3]{4} - \sqrt[5]{7}$

Teilweise radizieren

Häufig kann man den Radikanden so zerlegen, dass sich die Wurzel aus einem Teil ziehen lässt.
Ergebnisse sollten immer so dargestellt werden, dass sie nicht weiter radiziert werden können.

Beispiele: $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ oder kurz $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{x^6} = \sqrt{x^2\, x^2\, x^2} = x\, x\, x = x^3$

$\sqrt{x^7} = \sqrt{x^6 \cdot x} = x^3\sqrt{x}$

(Gerade Exponenten werden also beim Wurzelziehen halbiert, bei ungeraden Exponenten kann die Wurzel nicht vollständig gezogen werden!)

$$\sqrt{\frac{48\, a^6\, b^5}{18\, c^7\, d^3}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 3 \cdot a^6 \cdot b^4 \cdot b}{9 \cdot 2 \cdot\, c^6 \cdot c \cdot d^2 \cdot d}} = \frac{4\, a^3\, b^2}{3\, c^3\, d}\sqrt{\frac{3\, b}{2\, c\, d}}$$

scoogle.de

Name:	
Klasse:	Datum:

Mathematik

Rechnen mit Wurzeln

Rechnen mit Klammern

Das Rechnen mit Klammern funktioniert genauso wie ohne Wurzeln.

Beispiele:

$$4\sqrt{5}\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)=4\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}+4\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}=8\sqrt{15}+4\sqrt{35}$$

$$\left(5-3\sqrt{11}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+4\sqrt{7}\right)=5\sqrt{2}+20\sqrt{7}-3\sqrt{22}-12\sqrt{77}$$

$$\left(\sqrt{8}+6\sqrt{14}\right):\sqrt{2}=\frac{\sqrt{8}+6\sqrt{14}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}+\frac{6\sqrt{14}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}+6\sqrt{\frac{14}{2}}=\sqrt{4}+6\sqrt{7}=2+6\sqrt{7}$$

$$\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)=11-\sqrt{77}+\sqrt{77}-7=11-7=4$$

Viele der Zwischenschritte können weggelassen werden, sie dienen nur zum Verständnis!

Irrationalität von Wurzeln

Eine **rationale Zahl** ist eine Zahl, die sich als Quotient zweier ganzer Zahlen schreiben lässt.

Beispiel: $5=\frac{10}{2}$ 10 und 2 sind ganze Zahlen, 5 ist der Quotient aus beiden und deshalb rational.

Viele Wurzeln lassen sich nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen und sind daher **irrational**.
Der Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ findet sich unter www.scoogle.de/start.php=id=12401.

Lässt sich eine Wurzel nicht weiter teilweise radizieren (weil ihr Radikand keine Potenz des Wurzelexponenten ist), so ist diese Wurzel irrational.

Nenner rational machen

Oft ist in Aufgaben gefordert, dass keine Wurzeln im Nenner des Ergebnisses stehen sollen. Um dies zu erreichen, muss man geschickt erweitern.

Beispiele:

$$\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{15}{2\sqrt{10}}=\frac{15}{2\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\frac{15\sqrt{10}}{2\cdot 10}=\frac{15}{20}\sqrt{10}=\frac{3}{4}\sqrt{10}$$

$$\frac{6}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}=\frac{6\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)}=\frac{6\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)}{8-5}$$

$$=\frac{6\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)}{3}=2\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)=2\sqrt{8}+2\sqrt{5}$$

Mathematik

Name:	
Klasse:	Datum:

Rechnen mit Wurzeln

Wurzelgleichungen

Das Lösen von Wurzelgleichungen erfolgt in vier Schritten:

(1)		(2)		(3)		(4)
Wurzel freistellen	▶	Gleichung quadrieren	▶	x freistellen	▶	Probe durchführen

Beispiele:

$\sqrt{3x+1}-5=2$	$\mid +5$	(1) Alle Terme ohne Wurzeln werden vom Wurzelterm getrennt.
$\sqrt{3x+1}=7$	$\mid (\,)^2$	(2) Die Gleichung wird quadriert.
$3x+1=49$	$\mid -1$	(3a) Alles ohne x wird vom x getrennt, Strichrechnung hat Vorrang!
$3x=48$	$\mid :3$	(3b) Alles ohne x wird vom x getrennt, Punktrechnung folgt.
$x=16$		(4) Probe: $\sqrt{3\cdot 16+1}-5=\sqrt{49}-5=7-5=2$ ✓ $\mathbb{L}=\{16\}$

$14+2\sqrt{6-2x}=22$	$\mid -14$	(1) Alle Terme ohne Wurzeln werden vom Wurzelterm getrennt.
$2\sqrt{6-2x}=8$	$\mid :2$	
$\sqrt{6-2x}=4$	$\mid (\,)^2$	(2) Die Gleichung wird quadriert.
$6-2x=16$	$\mid -6$	(3) Alles ohne x wird vom x getrennt.
$-2x=10$	$\mid :(-2)$	
$x=-5$		(4) Probe: $14+2\sqrt{6-2\cdot(-5)}=14+2\sqrt{6+10}=22$ ✓ $\mathbb{L}=\{-5\}$

$5\sqrt{6x-2}-2=-7$	$\mid +2$	(1) Alle Terme ohne Wurzeln werden vom Wurzelterm getrennt.
$5\sqrt{6x-2}=-5$	$\mid :5$	
$\sqrt{6x-2}=-1$	$\mid (\,)^2$	(2) Die Gleichung wird quadriert.
$6x-2=1$	$\mid +2$	(3) Alles ohne x wird vom x getrennt.
$6x=3$	$\mid :6$	
$x=0{,}5$		(4) Probe: $5\sqrt{6\cdot 0{,}5-2}-2=5\sqrt{3-2}-2=3\neq -7$ ✗ $\mathbb{L}=\{\,\}$