Name:	
Klasse:	Datum:

Mathematik

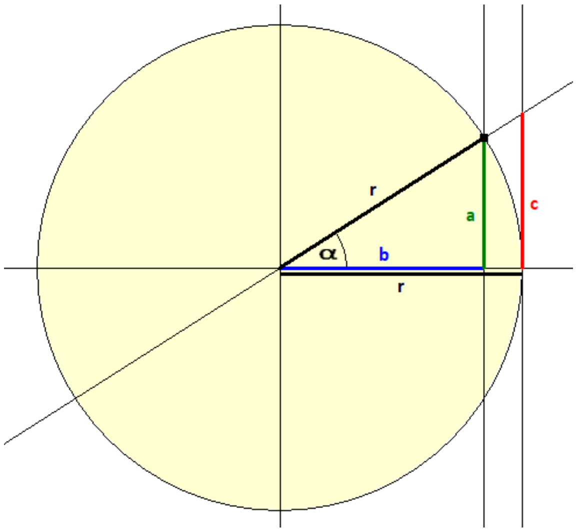
Trigonometrische Funktionen

Die Winkelfunktionen am Einheitskreis

1. In einen Kreis mit Radius r = 1 (ein sog. **Einheitskreis**) ist wie in nebenstehendem Bild ein Dreieck mit den Katheten a und b und ein weiteres mit den Katheten r und c eingezeichnet. Zeige, dass $a = \sin(\propto)$, $b = \cos(\propto)$ und $c = \tan(\propto)$ gilt.

2. Zeige mit Hilfe des 2. Strahlensatzes , dass mit den Bezeichnungen aus der Abbildung $\frac{a}{b} = c$ gilt. Zeige dann mit Hilfe der Definitonen der Winkelfunktionen, dass $\frac{\sin(\propto)}{\cos(\propto)} = \tan(\propto)$ sogar immer gilt.

3. Zeige, dass $(\sin(\propto))^2 + (\cos(\propto))^2 = 1$ gilt.



Funktionsgraphen erstellen

4. Zeichne um den Ursprung eines Koordinatensystems einen Kreis mit dem Radius r = 1 dm. Trage dann oberhalb der x-Achse einen Winkel von α=30° ein, ergänze die Dreiecke bzw. die Strahlensatzfigur wie in der Abbildung und lies dann die Werte für sin(30°), cos(30°) und tan(30°) ab.

   Verfahre ebenso mit α=60°, 90°, 120°, … und trage die Ergebnisse in die Wertetabelle ein.
   Beachte den Hinweis auf der nächsten Seite zum Ablesen der Werte bei Winkeln über 90°.

   Zur Kontrolle / Alternativ können die Werte auch mit dem Taschenrechner berechnet werden!

α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
sin(α)							
cos(α)							
tan(α)				----------			

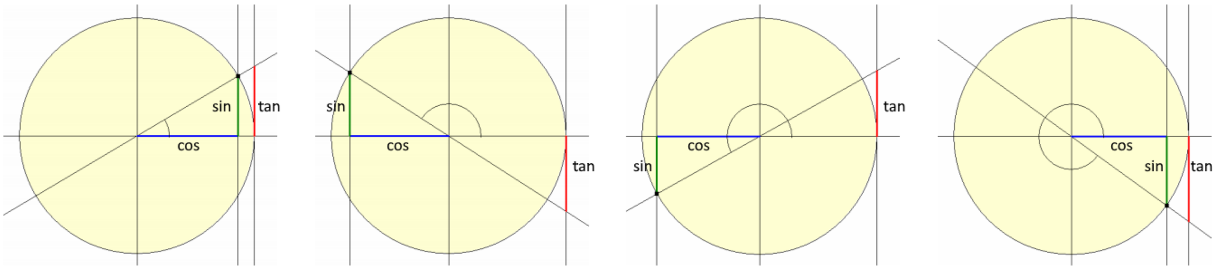
α	210°	240°	270°	300°	330°	360°	390°
sin(α)							
cos(α)							
tan(α)			----------				

Name:	
Klasse:	Datum:

Mathematik

Trigonometrische Funktionen

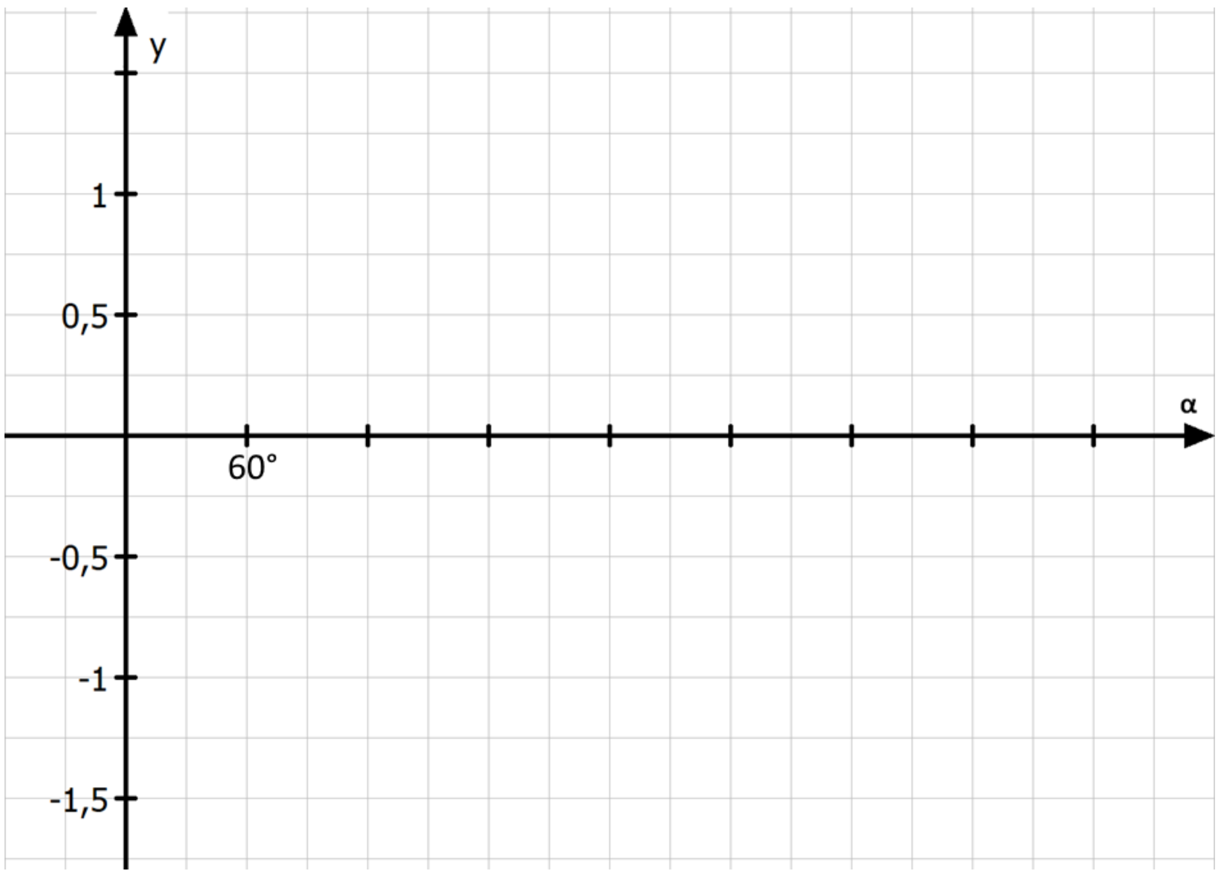
Hinweis: Bei Winkeln über 90° wird der obere Schenkel wie der Zeiger einer rückwärts laufenden Uhr weiter nach links in den nächsten Quadranten gedreht. Sinus- und Kosinuswerte ergeben sich weiterhin aus den beiden Katheten des Dreiecks (Vorzeichen beachten!), die Tangenswert wie zuvor mit Hilfe des Strahlensatzes (auch hier Vorzeichen beachten!)



5. Warum lässt sich der Tangens nicht immer berechnen? Begründe mit Aufgabe 2!

6. Welche Regelmäßigkeiten fallen bei der Wertetabelle auf?

7. Zeichne die Graphen aller drei Funktionen in das Koordinatensystem!
   Überlege anhand der erkannten Regelmäßigkeiten, wie sich die Funktiongraphen fortsetzen!



Name:	
Klasse:	Datum:

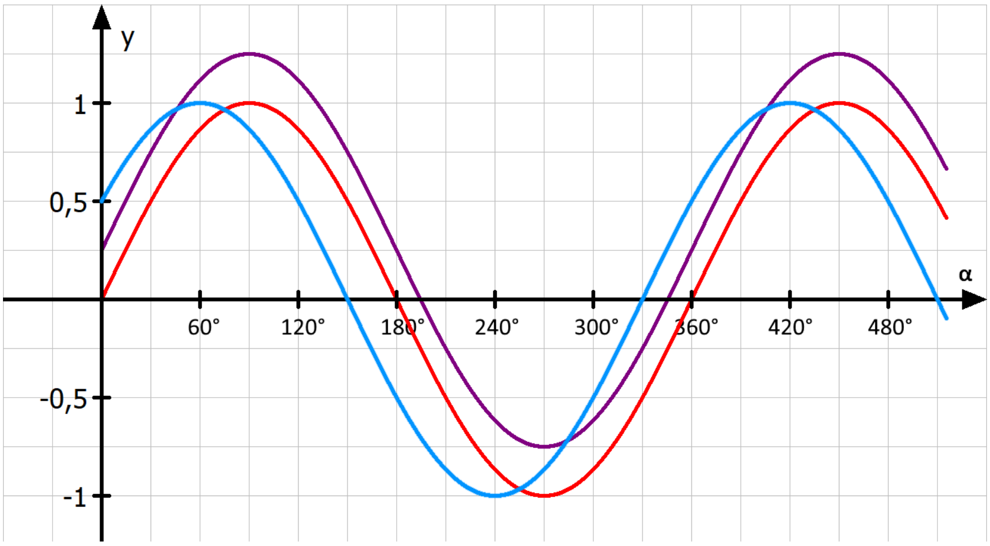
Mathematik

Trigonometrische Funktionen

Verschiebung der Graphen

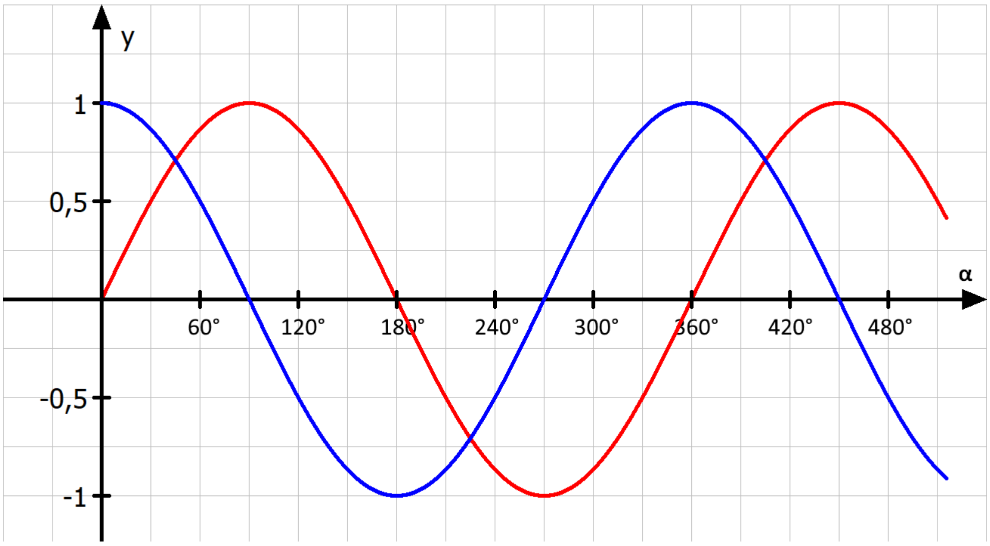
8. Eine Normalparabel lässt sich verschieben, in dem entweder vor dem quadrieren eine Konstante addiert/subtrahiert wird (p) oder danach (q): $f(x) = (x \pm p)^2 \pm q$. Wie wirken sich +p, -p, +q und –q auf jeweils die Lage der Normalparabel aus?

9. Die trigonometrischen Funktionen lassen sich analog zur Normalparabel verschieben. Ordne die Funktionen $f(\propto) = \sin(\propto)$, $g(\propto) = \sin(\propto) + 0{,}25$ und $h(\propto) = \sin(\propto + 30°)$ ihren jeweiligen Graphen zu.



10. Wo liegen jeweils der ersten Hochpunkt und die erste Nullstelle der Funktionen $i(\propto) = \sin(\propto) - 0{,}5$, $j(\propto) = \sin(\propto - 60°)$ und $k(\propto) = \sin(\propto - 60°) - 0{,}5$?

11. Stimmt die Aussage $\sin(\propto) = \cos(\propto - 90°)$?



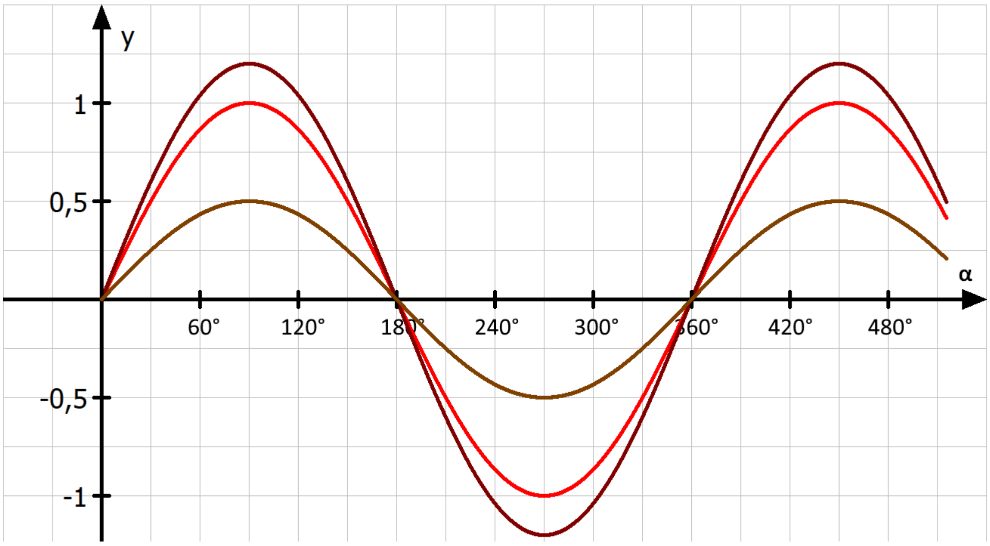
Name:	
Klasse:	Datum:

Trigonometrische Funktionen

Streckung und Stauchung der Graphen: Amplitude und Wellenlänge

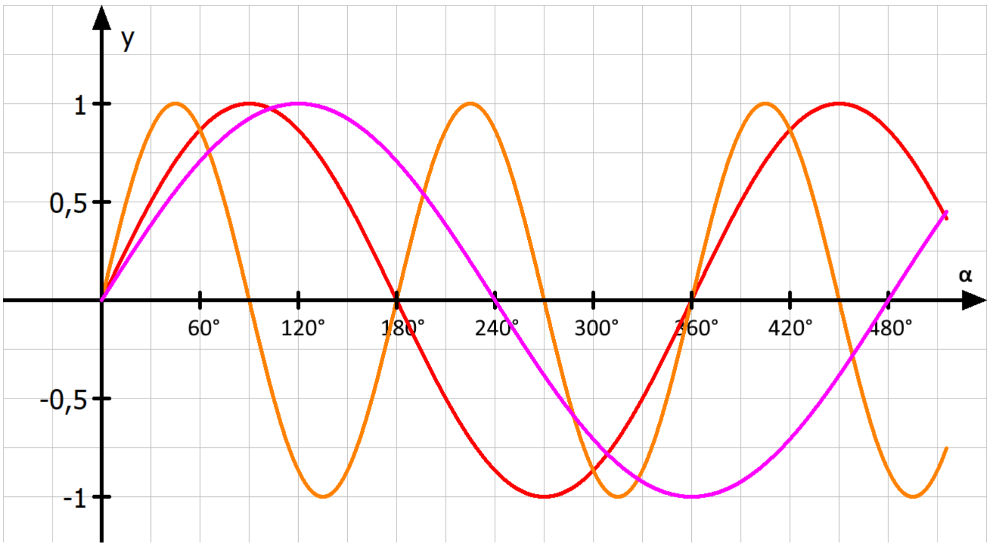
12. Sinus und Kosinus lassen sich in y-Richtung strecken und stauchen, in dem man einen Faktor voran stellt. Dabei bleiben die Nullstellen und auch die x-Werte der Hoch- und Tiefpunkte erhalten, die Größe des Ausschlags nach oben und unten (die sog. **Amplitude**) ändert sich jedoch.

    Ordne den Funktionen $f(\propto) = \sin(\propto)$, $l(\propto) = \frac{1}{2}\sin(\propto)$ und $m(\propto) = 1{,}2\,\sin(\propto)$ ihre Graphen zu.



13. Für eine Streckung und Stauchung entlang der waagrechten Achse muss der eingesetzte Winkel vervielfacht werden. Hierdurch ändern sich die Amplitude nicht, dafür aber die **Wellenlänge** und mit ihr die Nullstellen.

    Ordne den Funktionen $f(\propto) = \sin(\propto)$, $n(\propto) = \sin(0{,}75\propto)$ und $o(\propto) = \sin(2\propto)$ ihre Graphen zu.



Name:

Klasse: Datum:

Mathematik

Trigonometrische Funktionen

14. Ergänze die Sätze!

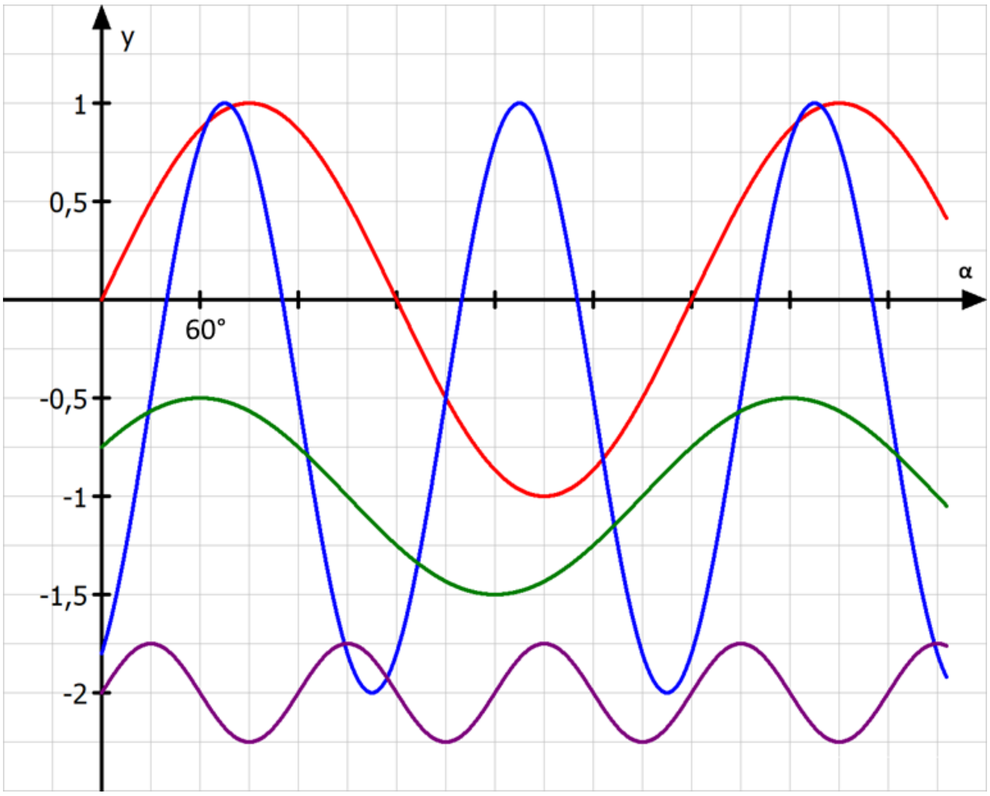
Für die Funktion $s(\propto) = t \cdot \sin(u \cdot \propto)$ gilt:

- Ist $|t| < 1$, so ist die Amplitude von $s(\propto)$ ________________ als bei $f(\propto) = \sin(\propto)$.
- Ist $|t| > 1$, so ist die Amplitude von $s(\propto)$ ________________ als bei $f(\propto) = \sin(\propto)$.
- Ist $|u| < 1$, so hat $s(\propto)$ eine ________________ Wellenlänge als $f(\propto) = \sin(\propto)$.
- Ist $|u| > 1$, so hat $s(\propto)$ eine ________________ Wellenlänge als $f(\propto) = \sin(\propto)$.

15. Bei der Sinus- und der Kosinusfunktion verändern sich beim Strecken und Stauchen die Amplitude und/oder die Wellenlänge. Was passiert aber bei der Tangensfunktion? Probiere es mit einem geeigneten Funktionsplotter aus!

16. Streckung, Stauchung und Verschiebung lassen sich auch kombinieren.

Ordne den Funktionen $f(\propto) = \sin(\propto)$, $v(\propto) = 1{,}5\sin(2 \propto - 60°) - 0{,}5$, $w(\propto) = 0{,}25\sin(3 \propto) - 2$ und $z(\propto) = 0{,}5\sin(\propto + 30°) - 1$ und ihre Graphen zu.

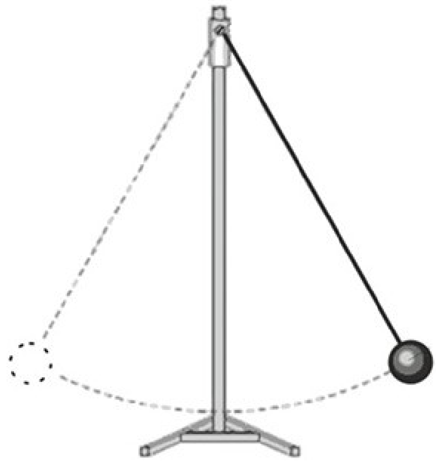


Mathematik

Trigonometrische Funktionen

Name:	
Klasse:	Datum:

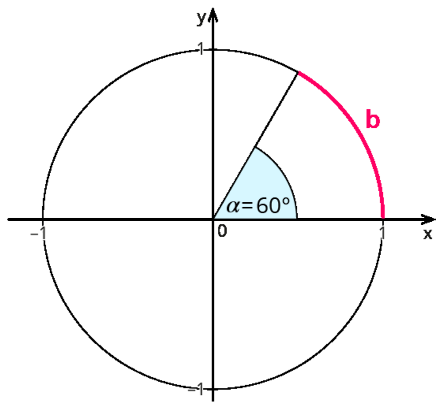
Anwendung in der Physik



Die trigonometrischen Funktionen finden vor allem in der Physik Anwendung. Trägt man Messwerte vom Ausschlag , also der Amplitude, eines Pendels (y-Achse) zu unterschiedlichen Zeitpunkten (x-Achse) in ein Koordinatensystem ein, so ergibt sich eine Sinuskurve mit dem größten Ausschlag als Hochpunkt und mit Nullstellen zu den Zeitpunkten, an denen das Pendel genau senkrecht steht. Häufig betrachtet man dann nicht nur die Wellenlänge, sondern auch die **Frequenz**. Sie gibt an, wie oft ein Pendel in einem bestimmten Zeitraum hin- und herschwingt und ist antiproportional zur Wellenlänge.

Auch elektromagnetische Schwingungen (wie Röntgenstrahlung, Mikrowellen, Funkwellen und auch Licht) lassen sich mit Sinuskurven beschreiben und anhand ihrer Frequenz klassifizieren (einordnen).

Das Bogenmaß



17. Winkel lassen sich nicht nur in Grad angeben, sondern auch anhand der Länge des zugehörigen Kreisbogens am Einheitskreis. Dies ist das sog. **Bogenmaß**. Meist gibt man es als Bruchteil oder Vielfache der Kreiszahl π an.

    Berechne den Umfang des Einheitskreises. Überlege dann, welche Bogenlänge zu einem Winkel von 60° gehört. Fülle schließlich die Umrechnungstabelle aus für das Bogenmaß aus!

    Der Taschenrechner kennt beim Rechnen mit trigonometrischen Funktionen beide Modi zu Angabe von Winkeln. Ist er auf DEG (=degree) eingestellt, rechnet er in Grad, bei der Einstellung RAD (=radiant), benutzt er das Bogenmaß.

α	0°	1°	10°	30°	36°	45°	60°	90°	135°	180°	270°	360°
b												

18. Mit welchen Formeln lassen sich Grad ins Bogenmaß und Bogenmaß in Grad umrechnen?

Mathematik

Name:	
Klasse:	Datum:

Trigonometrische Funktionen

Lösungen

1. Wegen r=1 gilt im Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypothnuse r: $\sin(\propto) = \frac{a}{r} = \frac{a}{1} = a$ und entsprechend $\cos(\propto) = \frac{b}{r} = \frac{b}{1} = b$. Im anderen Dreieck gilt: $\tan(\propto) = \frac{c}{r} = \frac{c}{1} = c$.

2. Laut dem 2. Strahlensatz gilt $\frac{a}{c} = \frac{b}{r}$ oder umgeformt $\frac{a}{b} = \frac{c}{r}$. Wegen r = 1 folgt $\frac{a}{b} = c$.
Nach den Definitionen der Winkelfunktionen gilt: $\frac{\sin(\propto)}{\cos(\propto)} = \frac{\frac{GK}{HY}}{\frac{AK}{HY}} = \frac{GK}{HY} \cdot \frac{HY}{AK} = \frac{GK}{AK} = \tan(\propto)$.

3. Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $a^2 + b^2 = r^2$.
Mit r = 1 und Aufgabe 1 folgt: $(\sin(\propto))^2 + (\cos(\propto))^2 = 1^2 = 1$.

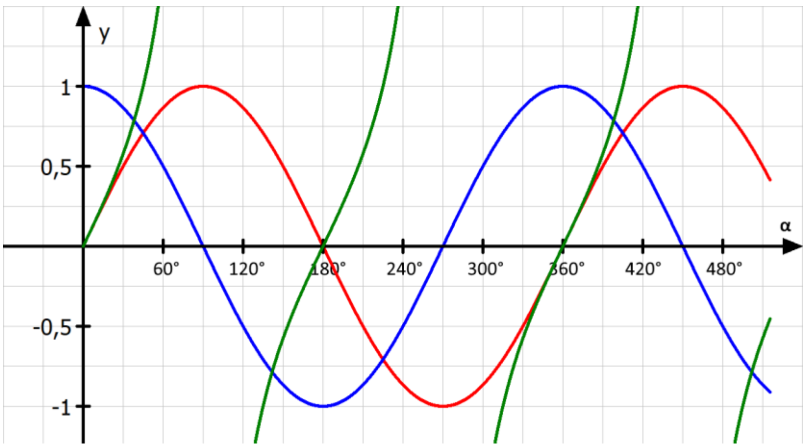
4. Es ergibt sich folgende Wertetabelle:

α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°	390°
sin(α)	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0	0,5
cos(α)	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0	0,5	1	0,5	0,87
tan(α)	0	0,58	1,73		-1,73	-0,58	0	0,58	1,73		-1,73	-0,58	0	0,58

5. Laut Aufgabe 2 ergibt sich bei 90° und bei 270° eine Division durch 0.

6. Folgende Regelmäßigkeiten fallen auf:
   - Die Sinus- und die Kosinuswerte schanken zwischen 1 und -1 und wiederholen sich.
   - Der Tangenswerte wiederholen sich auch, weisen aber keinen Grenzwert nach oben/unten auf.
   - Bei allen drei Funktionen wechseln die Werte in regelmäßigen Abständen das Vorzeichen.

7. Folgende Graphen ergeben sich:



Trigonometrische Funktionen

Name:	
Klasse:	Datum:

8. +p: Die Normalparabel verschiebt sich um p nach links.
   -p: Die Normalparabel verschiebt sich um p nach rechts.
   +q: Die Normalparabel verschiebt sich um q nach oben
   -q: Die Normalparabel verschiebt sich um q nach unten.

9. $f(\propto)$ schneidet die y-Achse im Ursprung, $g(\propto)$ bei 0,25, $h(\propto)$ bei 0,5.

10. $i(\propto)$ ist gegenüber $f(\propto)$ um 0,5 nach unten verschoben.
    Der erste Hochpunkt liegt bei (90°/0,5), die erste Nullstelle bei 30°.

    $j(\propto)$ ist gegenüber $f(\propto)$ um 60° nach rechts verschoben.
    Der erste Hochpunkt liegt bei (150°/1), die erste Nullstelle bei 60°.

    $k(\propto)$ ist gegenüber $f(\propto)$ um 60° nach rechts verschoben und und 0,5 nach unten verschoben.
    Der erste Hochpunkt liegt bei (150°/0,5), die erste Nullstelle bei 90°.

11. Die Aussage stimmt. Verschiebt man den Graphen der Kosinusfunktion um 90° nach rechts, ergibt sich genau der der Sinusfunktion.

12. $f(\propto)$ hat den Hochpunkt bei (90°/1), $l(\propto)$ bei (90°/1,2), $m(\propto)$ bei (90°/0,5).

13. $f(\propto)$ hat nach dem Ursprung die erste Nullstelle bei 180°, $n(\propto)$ erst bei 240°, $o(\propto)$ bei 90°.

14. Für die Funktion $s(\propto) = t \cdot \sin(u \cdot \propto)$ gilt:
    Ist $|t| < 1$, so ist die Amplitude von $s(\propto)$ kleiner als bei $f(\propto) = \sin(\propto)$.
    Ist $|t| > 1$, so ist die Amplitude von $s(\propto)$ größer als bei $f(\propto) = \sin(\propto)$.
    Ist $|u| < 1$, so hat $s(\propto)$ eine größere Wellenlänge als $f(\propto) = \sin(\propto)$.
    Ist $|u| > 1$, so hat $s(\propto)$ eine kleinere Wellenlänge als $f(\propto) = \sin(\propto)$.

15. Ein Faktor vor der Funktion macht sie steiler (>1) oder flacher (<1). Ein Faktor vor dem Winkel vergrößert (<1) bzw. verkleinert (>1) den Abstand zwischen den Polstellen.

16. $f(\propto)$ schneidet die y-Achse im Ursprung, $v(\propto)$ zwischen -1,5 und -2, $w(\propto)$ bei -2 und $z(\propto)$ bei -0,75.

17. Es ergibt sich folgende Umrechnungstabelle:

α	0°	1°	10°	30°	36°	45°	60°	90°	135°	180°	270°	360°
b	0	π/180	π/18	π/6	π/5	π/4	π/3	π/2	3/4 π	π	3/2 π	2 π

18. Aus der Tabelle folgt: $b = \propto \cdot \frac{\pi}{180°}$. Umgekehrt ergibt sich: $\propto = b \cdot \frac{180°}{\pi}$.