Def.: *Ganzrationale Funktionen* sind darstellbar als Brüche, deren Zähler und Nenner Polynome sind.

Bsp.: Funktionen: $f_1(x) = \frac{2}{x-2}$ $\quad f_2(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ $\quad f_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Defintions-bereiche: $ID_1 = IR \setminus \{2\}$ $\quad ID_2 = IR \setminus \{-1\}$ $\quad ID_3 = IR$

Die Einschränkungen der Definitionsbreiche bei der 1. und 2. Funktion ist notwendig, da jeweils die Nenner nicht 0 werden dürfen.

Def.: Die vom Definitionsbereich ausgenommenen x-Werte nennt man auch ***Definitionslücken***.
Strebt x von rechts und links gegen die Definitionslücke, so spricht man von einer
- (stetig) ***hebbare Definitionslücke*** wenn die zugehörigen y-Werte gegen denselben Grenzwert streben,
- ***Polstelle***, wenn die zugehörigen y-Werte gegen $\pm\infty$ streben.

Bsp.: Definitions-lücken:

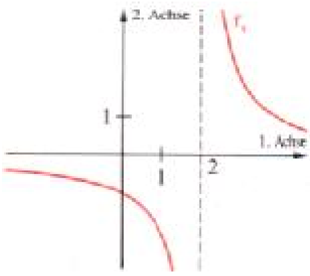
Definitionslücke ist 2. Diese ist eine Polstelle, da sich die Funktion nicht geeignet (vgl. 2. Funktion) umformen läßt.

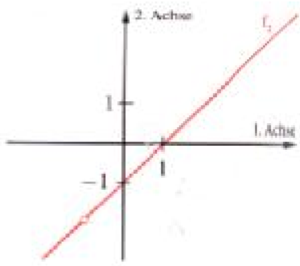
Definitionslücke ist -1. Diese ist hebbar, da sich die Funktion so umformen läßt, daß der Definitionsbereich nicht mehr eingeschränkt werden müßte:

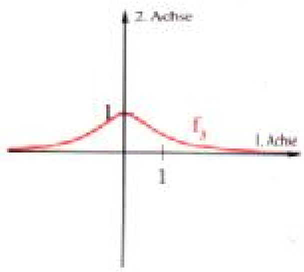
$$f_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$$

Die Funktion besitzt keine Definitonslücke.

Funktions-graphen:







y strebt gegen verschiedene Werte, je nach dem, ob x von links oder von rechts gegen die Polstelle strebt.

y strebt gegen den gleichen Wert, so daß sich ein Graph ergibt, der sich bis auf die Definitionslücke durchzeichnen läßt.

Da bei dieser Funktion keine Definitionslücke vorlag, läßt sich der Graph mit als zusammenhängende Linie zeichnen.

Satz: Läßt sich eine ganzrationale Funktion mit Definitionslücke so kürzen, daß der Nenner vollständig entfällt, so ist ihre Definitionslücke keine Polstelle.
Insbesondere liegt dann keine Polstelle vor, wenn die Polynomdivision des Zählers durch den Nenner keinen Rest ergibt.

Bsp.:

$f_4(x) = \frac{x^2+11x-51}{x-3} = 2x+17$ hat die Definitionslücke 3, die aber keine Polstelle ist.

$f_5(x) = \frac{x^2+11x-49}{x-3} = 2x+17+\frac{2}{x-3}$ hat 3 als Definitionslücke und Polstelle.

[Beide Funktionen wurden mit Hilfe einer Polynomdivision umgeformt. Bei f_5 blieb dabei ein Rest von 2.]

Def. Nähert sich eine Funktion f für $x \to \pm\infty$ immer näher an einen Wert, so heißt dieser ***Grenzwert von f***.
Nähert sich eine Funktion für $x \to \pm\infty$ immer näher an eine Gerade, so heißt diese ***Asymptote zu f***.
Hat eine Funktion f den Grenzwert g, so ist die Gerade $y = g$ Asymptote zu f.

Satz: Läßt sich bei einer ganzrationalen Funktion die Polynomdivision des Zählers durch den Nenner nur mit Rest durchführen und hat das Ergebnis Höchstgrad 1, so ist die Asymptote genau dieses Ergebnis ohne den Rest.

Bsp.: Die Funktion f_5 aus dem vorangegangenen Beispiel hat die Asymptote $y = 2x + 17$.
Offensichtlich ist dies eine Gerade mit Achsenabschnitt 17 und Steigung 2.