Keine Lust, alle Teilbarkeitsregeln zu lernen? Wie wär's damit:

Nur <u>EINE</u> Teilbarkeitsregel <u>FÜR ALLE</u> Zahlen! ☺

Anleitung

Gegeben ist eine natürliche Zahl b und eine weitere natürliche Zahl a.
Frage: Kann man b ohne Rest durch a dividieren?

Diese Frage lässt sich beantworten, ohne eine Division durchzuführen.
Das Verfahren ist ganz einfach:

1. Multipliziere die erste Ziffer von b mit (10-a).
2. Addiere die zweite Ziffer zu dem Ergebnis.
3. Multipliziere das Ergebnis mit (10-a).
4. Addiere die nächste Ziffer zu dem Ergebnis.
5. Wiederhole die Schritte 3 und 4 bis zur letzten Ziffer.

Ist das Ergebnis dieser Rechnung ohne Rest durch a teilbar,
so ist auch die ursprüngliche Zahl b ohne Rest durch a teilbar.

Beispiele und Anmerkungen

Das Verfahren klingt etwas kompliziert, ist es aber eigentlich gar nicht:

Ist 1715 teilbar durch 7?

$10 - 7 = 3$, also muss jeweils mit 3 multipliziert werden.

$1 \xrightarrow{\cdot 3} 3 \xrightarrow{+7} 10 \xrightarrow{\cdot 3} 30 \xrightarrow{+1} 31 \xrightarrow{\cdot 3} 93 \xrightarrow{+5} 98$

98 ist teilbar durch 7, also ist auch 1715 teilbar durch 7.

Wenn man sich nicht sicher ist, ob das Ergebnis teilbar ist, kann man damit das gleiche Verfahren erneut durchführen. Praktischerweise wird bei jedem Durchgang das Ergebnis kleiner – und zwar so lange, bis es einstellig wird!

Ist 98 wirklich teilbar durch 7?

$9 \xrightarrow{\cdot 3} 27 \xrightarrow{+8} 35$

Immer noch zu groß? Dann mal schauen, ob 35 durch 7 teilbar ist…

$3 \xrightarrow{\cdot 3} 9 \xrightarrow{+8} 14$

Dass 14 durch 7 teilbar ist, dürfte klar sein.
Aber falls doch nicht, geht es so weiter:

$1 \xrightarrow{\cdot 3} 3 \xrightarrow{+4} 7$

Jetzt aber! 7 ist auf jeden Fall durch 7 teilbar, also ist auch 14 durch 7 teilbar, also auch 35, also auch 98 und somit auch 1715!

Das Verfahren funktioniert auch mit kleinen Divisoren (z.B. 2 oder 3), aber:
Je kleiner der Divisor ist, desto größer bleibt das Ergebnis!
Bei großem Dividenden und kleinem Divisor man also ziemlich viele Schritte.

Ist 486 teilbar durch 3?

$10-2=7$, also muss jeweils mit 8 multipliziert werden.

$4 \xrightarrow{\cdot 7} 28 \xrightarrow{+8} 36 \xrightarrow{\cdot 8} 288 \xrightarrow{+6} 284$

$2 \xrightarrow{\cdot 7} 14 \xrightarrow{+8} 22 \xrightarrow{\cdot 7} 29 \xrightarrow{+4} 33$

$3 \xrightarrow{\cdot 7} 21 \xrightarrow{+3} 24$

...

Außerdem funktioniert das Verfahren auch mit Divisoren, die größer sind als 10, dafür muss man allerdings mit negativen Zahlen rechnen können:

Ist 221 teilbar durch 17?

$10-17=-7$, also muss jeweils mit -7 multipliziert werden.

$2 \xrightarrow{\cdot(-7)} -14 \xrightarrow{+2} -12 \xrightarrow{\cdot(-7)} 84 \xrightarrow{+1} 85$

85 ist teilbar durch 17, also ist auch 221 teilbar durch 17.

Ist 7592 durch 13 teilbar?

$10-13=-3$, also muss jeweils mit -3 multipliziert werden.

$7 \xrightarrow{\cdot(-3)} -21 \xrightarrow{+5} -16 \xrightarrow{\cdot(-3)} 48 \xrightarrow{+9} 57 \xrightarrow{\cdot(-3)} -171 \xrightarrow{+2} -169$

Bei nochmaliger Anwendung wird das Minuszeichen ignoriert!

$1 \xrightarrow{\cdot(-3)} -3 \xrightarrow{+6} 3 \xrightarrow{\cdot(-3)} -9 \xrightarrow{+9} 0$

0 ist teilbar durch 13, also auch 169, -169 und somit schließlich 7592.

Aufgaben

Gegeben sind die Zahlen (a) 133, (b) 172, (c) 1771 und (d) 610850.

1. Welche Zahlen sind teilbar durch 7?
   Überprüfe die Teilbarkeit mit dem beschriebenen Verfahren.

2. Kannst du bei den Zahlen, die nicht durch 7 teilbar sind,
   die letzte Ziffer so ändern, dass es doch klappt?

3. Welche der Zahlen sind teilbar durch 19?
   Überprüfe die Teilbarkeit mit dem beschriebenen Verfahren.

4. Denke dir weitere Aufgaben aus!

Achtung!
Negative Zahlen
in der Rechnung!

Taschenrechner sind erlaubt!

Beweis des Verfahrens (für Lehrer und andere schlaue Menschen)

Der Dividend b sei eine Zahl mit den Ziffern z_n bis z_0, nummeriert von n (erste Ziffer) bis 0 (letzte Ziffer). Die Zahl hat also die Darstellung $z_n z_{n-1} \ldots z_2 z_1 z_0$.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
b &= 1 \cdot z_0 + 10 \cdot z_1 + 100 \cdot z_2 + 1000 \cdot z_3 + \ldots + 10^n \cdot z_n \\
&= 10^0 \cdot z_0 + 10^1 \cdot z_1 + 10^2 \cdot z_2 + 10^3 \cdot z_3 + \ldots + 10^n \cdot z_n \\
&= \sum_{i=0}^{n} 10^i z_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(10^i - (10-a)^i + (10-a)^i\right) \cdot z_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\left(10^i - (10-a)^i\right) \cdot z_i + (10-a)^i \cdot z_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(10^i - (10-a)^i\right) \cdot z_i + \sum_{i=0}^{n} (10-a)^i \cdot z_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(10^i - \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \cdot 10^{i-k} \cdot a^k \cdot (-1)^k\right) \cdot z_i + \sum_{i=0}^{n} (10-a)^i \cdot z_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(10^i - \left(\binom{i}{0} \cdot 10^i \cdot a^0 - \sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} \cdot 10^{i-k} \cdot a^k \cdot (-1)^k\right)\right) \cdot z_i + \sum_{i=0}^{n} (10-a)^i \cdot z_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(10^i - \left(10^i - \sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} \cdot 10^{i-k} \cdot a^k \cdot (-1)^k\right)\right) \cdot z_i + \sum_{i=0}^{n} (10-a)^i \cdot z_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(10^i - 10^i + \sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} \cdot 10^{i-k} \cdot a^k \cdot (-1)^k\right) \cdot z_i + \sum_{i=0}^{n} (10-a)^i \cdot z_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} \cdot 10^{i-k} \cdot a^k \cdot (-1)^k\right) \cdot z_i + \sum_{i=0}^{n} (10-a)^i \cdot z_i
\end{aligned}
$$

Es gilt:

$$
a \mid a^k \Rightarrow a \mid a^k \Rightarrow a \left| \sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} \cdot 10^{i-k} \cdot a^k \cdot (-1)^k \right. \Rightarrow a \left| \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} \cdot 10^{i-k} \cdot a^k \cdot (-1)^k\right) \cdot z_i \right.
$$

a teilt also den ersten der beiden Summanden.

Zu prüfen ist nur noch, ob a auch den zweiten teilt, also ob $a \left| \sum_{i=0}^{n} (10-a)^i \cdot z_i \right.$ gilt.

Die Summe lässt sich noch ein wenig umschreiben, um das Rechnen zu erleichtern:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}(10-a)^i \cdot z_i \\
&= z_0 + z_1 \cdot (10-a) + z_2 \cdot (10-a)^2 + z_3 \cdot (10-a)^3 + \ldots + z_n \cdot (10-a)^n \\
&= z_0 + (10-a) \cdot \left(z_1 + z_2 \cdot (10-a) + z_3 \cdot (10-a)^2 + \ldots + z_n \cdot (10-a)^{n-1}\right) \\
&= z_0 + (10-a) \cdot \left(z_1 + (10-a) \cdot \left(z_2 + z_3 \cdot (10-a) + \ldots + z_n \cdot (10-a)^{n-2}\right)\right) \\
&= z_0 + (10-a) \cdot \left(z_1 + (10-a) \cdot \left(z_2 + (10-a) \cdot \left(z_3 + \ldots + z_n \cdot (10-a)^{n-3}\right)\right)\right) \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

Dies ist genau das beschriebene Verfahren.

Die Konvergenz der Mehrfachausführung des Verfahrens ergibt sich daraus, dass für alle a>0 gilt: $\sum_{i=0}^{n}(10-a)^i \leq \sum_{i=0}^{n}10^i$.