Name:	
Klasse:	Datum:

Stellenwertsysteme

Das Dezimalsystem (10er-System)

Im Alltag und normalerweise auch in der Mathematik nutzen wir das Dezimalsystem. In diesem System bestehen Zahlen aus hintereinander geschriebenen Ziffern von 0 bis 9, wobei jede Stelle einen anderen Wert repräsentiert: Die letzte Stelle steht für Einer (= 10^0), die vorletzte für 10er (= 10^1), die davor für Hunderter (= 10^2) usw.; darstellen lässt sich dies in einer **Stellenwerttafel**:

	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
	ZT	T	H	Z	E
	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
$346 = 0 \cdot 10000 + 0 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 1 =$			3	4	6
$5837 = 0 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1 =$		5	8	3	7
$10579 = 1 \cdot 10000 + 0 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 9 \cdot 1 =$	1	0	5	7	9

Das Binärsystem (2er-System)

Das Binärsystem funktioniert im Prinzip genauso, kennt allerdings nur die Ziffern 0 und 1. Die Stellen stehen nicht mehr für 10er-, sondern für 2er-Potenzen, also die letzte für 1er (= 2^0), die vorletzte für 2er (= 2^1), die davor für 4er (= 2^2), die nächste für 8er (= 2^3) usw.!

	64 er	32 er	16 er	8 er	4 er	2 er	1 er
	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
$2 = 0 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 =$						1	0
$19 = 0 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$			1	0	0	1	1
$123 = 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$	1	1	1	1	0	1	1

Binärzahlen in Dezimalzahlen umwandeln

Möchte man eine Zahl vom Binärsystem in das Dezimalsystem umrechnen, arbeitet man sich am besten **von hinten nach vorne** durch:

$$\begin{aligned}[1110011101]_2 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 32 + 0 \cdot 64 + 1 \cdot 128 + 1 \cdot 256 + 1 \cdot 512 \\ &= 1 + 0 + 4 + 8 + 16 + 0 + 0 + 128 + 256 + 512 = 925\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1000110101]_2 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 64 + 0 \cdot 128 + 0 \cdot 256 + 1 \cdot 512 \\ &= 1 + 0 + 4 + 0 + 16 + 32 + 0 + 0 + 0 + 512 = 565\end{aligned}$$

Aufgabe

1. Schreibe die folgenden Binärzahlen in das Dezimalsystem um!

   a) $[11]_2$ c) $[1111]_2$ e) $[110011]_2$

   b) $[101]_2$ d) $[10001]_2$ f) $[1010101]_2$

Name:	
Klasse:	Datum:

Stellenwertsysteme

Dezimalzahlen in Binärzahlen umwandeln

Um eine Zahl vom Dezimalsystem in das Binärsystem umzuwandeln, hilft folgender Algorithmus:

Die Zahl 925 soll in das Binärsystem umgewandelt werden.

(1) Suche die größte Zweierpotenz, die kleiner als die umzurechnende Zahl ist.

(2) Dividiere die umzurechnende Zahl durch diese Zweierpotenz.

(3) Dividiere den Rest durch die nächst kleinere Zweierpotenz.

(4) Wiederhole Schritt (3), bis der Divisor 1 ist.
Dann ist auch kein Rest mehr übrig.

(5) Schreibe die ganzzahligen Ergebnisse der Divisionen (also die Zahlen ohne den Rest) hintereinander:

$925 = [1110011101]_2$

925

512

925 : 512 = **1** R 413

413 : 256 = **1** R 157

157 : 128 = **1** R 29

29 : 64 = **0** R 29

29 : 32 = **0** R 29

29 : 16 = **1** R 13

13 : 8 = **1** R 5

5 : 4 = **1** R 1

1 : 2 = **0** R 1

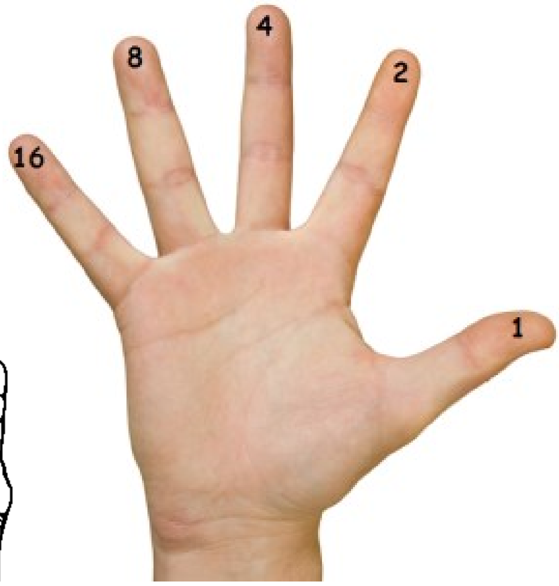
1 : 1 = **1** R 0

Aufgabe

2. Denke dir jeweils drei dreistellige und drei vierstellige Dezimalzahlen aus und wandele sie in Binärzahlen um!

Mit Binärzahlen zählen

Mit Hilfe des Binärsystems ist es möglich, mit den Fingern einer Hand bis 31 zu zählen! Schreibe dir dazu eine 1 auf den Daumen, eine 2 auf den Zeigefinger, eine 4 auf den Mittelfinger, eine 8 auf den Ringfinger und eine 16 auf den kleinen Finger. Jeder Finger entspricht jetzt einer Stelle in der Stellenwerttafel. Ist der Finger ausgestreckt, steht an dieser Stelle eine 1, sonst eine 0.



Die komplett geöffnete Hand entspricht also der 31:
$1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 31$

Der erhobene Zeigefinger ist eine 2:
$0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2$

Die Rockerhand entspricht der 18:
$1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 18$

Aufgaben

3. Welcher Zahl entspricht eine geschlossene Faust?

4. Zähle so schnell wie möglich mit den Fingern von 0 bis 31!

5. Wie weit könnte man zählen, wenn man das System auf der zweiten Hand fortsetzt?

Name:	
Klasse:	Datum:

Stellenwertsysteme

Anwendung des Binärsystems in der Informatik

Zahlensysteme finden vor allem in der Informatik Anwendung. Computer bestehen im Prinzip nur aus Leitungen, durch die ein Strom fließt (=1) oder eben nicht (=0). Daher müssen alle Eingaben in einen binären Code umgewandelt werden, also eine Kette, die nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht. Tippt man z.B. auf der Tastatur eine Taste, so wird ein 8-stelliger Binärcode übergeben, bei der Taste „s“ z.B. der Code $[01110011]_2 = 115$; es wurde also Zeichen Nr. 115 getippt.

Der achtstellige Binärcode entspricht genau der Datenmenge von 8 Bit oder 1 Byte, $2^{10} = 1024$ Bytes ergeben 1 kB (Kilobyte), $2^{10} = 1024$ davon wiederum 1 MB (Megabyte), 2^{10} davon 1 GB (Gigabyte), 2^{10} davon 1 TB (Terrabyte). Damit entspricht ein Terrabyte $2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 2^{40} \approx 1{,}1$ Billionen Byte! Auf einer Festplatte mit 1 TB Speicher lassen sich also über 1 Billionen Buchstaben speichern. Das sind über 250 Milliarden vollgedruckte DIN A4-Seiten.

Auch um die Geschwindigkeit eines Prozessors anzugeben, werden solche Dimensionen benötigt. 1 GHz bedeutet, dass der Prozessor in nur einer Sekunde über 1 Billionen mal zwischen 0 und 1 hin- oder herschalten kann. Zum Vergleich: Ein Mensch, der niemals schläft und fünf Lichtschalter pro Sekunde bedient, bräuchte für 1 Billionen Schaltungen fast 7000 Jahre!

Weitere Stellenwertsysteme

Das Stellenwertprinzip lässt sich auch mit der Basis 3 anwenden. Für das 3er-System verwendet man die Ziffern 0, 1 und 2 und die 3er-Potenzen für die Stellen:

	243 er	81 er	27 er	9 er	3 er	1 er
	3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0
$500 = 2 \cdot 243 + 0 \cdot 81 + 0 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 =$	2	0	0	1	1	2
$173 = 0 \cdot 243 + 2 \cdot 81 + 0 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 =$		2	0	1	0	2

Auch der Umrechnungsalgorithmus funktioniert wie beim Binärsystem:

Die Zahl 699 soll in das Ternärsystem umgewandelt werden.	699
(1) Suche die größte Dreierpotenz, die kleiner als die umzurechnende Zahl ist.	243
(2) Dividiere die umzurechnende Zahl durch diese Dreierpotenz.	699 : 243 = **2** R 213
(3) Dividiere den Rest durch die nächst kleinere Dreierpotenz.	213 : 81 = **2** R 51
(4) Wiederhole Schritt (3), bis der Divisor 1 ist. Dann ist auch kein Rest mehr übrig.	51 : 27 = **1** R 24
	24 : 9 = **2** R 6
(5) Schreibe die ganzzahligen Ergebnisse der Divisionen (also die Zahlen ohne den Rest) hintereinander:	6 : 3 = **2** R 0
$700 = [221220]_3$	0 : 1 = **0** R 0

Name:	
Klasse:	Datum:

Stellenwertsysteme

Wie mit 2, 3 und 10 lässt sich auch mit jeder anderen Basis ein eigenes Zahlensystem erstellen:

Ergänze die Tabelle!

Basis	Name		benötigte Ziffern
2	**Binärsystem**	(2er-System)	0, 1
3	**Ternärsystem**	(3er-System)	0, 1, 2
	Quaternärsystem	(4er-System)	0, 1, 2, 3
5	**Quinärsystem**		
6	**Senärsystem**		
8	**Oktalsystem**		
	Dezimalsystem		

Das Hexadezimalsystem (16er-System)

Bisher waren die verwendeten Basen kleiner oder gleich 10. Das Prinzip funktioniert aber auch mit größeren Basen, z.B. mit 16. Dann werden zusätzlich zu den Ziffern 0 bis 9 noch weitere benötigt, da sonst in der Stellenwerttafel zweistellige „Ziffern“ auftauchen würden:

	65536 er	4096 er	256 er	16 er	1 er
	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0
$29 = 0 \cdot 65536 + 0 \cdot 4096 + 0 \cdot 256 + 1 \cdot 16 + 13 \cdot 1 =$				1	13
$179 = 0 \cdot 65536 + 0 \cdot 4096 + 1 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 3 \cdot 1 =$				11	3

Damit wären z.B. die Zahlen 29 und 179 nicht unterscheidbar, beide wären umgerechnet $[113]_{16}$. Deshalb schreibt man für Stellen, die 10 mal oder öfter gebraucht werden, Großbuchstaben – und zwar A für 10, B für 11, C für 12, D für 13, E für 14 und F für 15. Für die 29 und die 179 bedeutet das:

$29 = 0 \cdot 65536 + 0 \cdot 4096 + 0 \cdot 256 + 1 \cdot 16 + 13 \cdot 1 =$				1	D
$179 = 0 \cdot 65536 + 0 \cdot 4096 + 1 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 3 \cdot 1 =$				B	3

Mit anderen Worten: $29 = [1D]_{16}$ und $179=[B3]_{16}$!

Aufgaben

6. Würfele dir mit fünf normalen Würfeln. Die Augenzahlen ergeben die Ziffern einer Senärzahl, wobei die Augenzahl 6 einer 0 entspricht; im Bild rechts wurde also die $[53104]_6$ gewürfelt. Würfele mindestens drei solcher Zahlen und wandele sie in das Dezimalsystem um.

7. Rechne folgende Zahlen in das Dezimalsystem um:

   a) $[113]_{16}$ b) $[1213]_4$ c) $[21012]_3$ d) $[4000]_5$ e) $[10150]_8$

8. Welches sind dir größten zwei- und dreistelligen Zahlen im Hexadezimalsystem?

9. Schreibe die Dezimalzahl 100000 als Hexadezimalzahl.
   Verwende dazu den bekannten (aber entsprechend anzupassenden) Algorithmus.