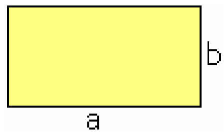
Flächeninhalte von Vielecken

Rechteck und Quadrat

Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b
hat die Fläche $A = a \cdot b$.

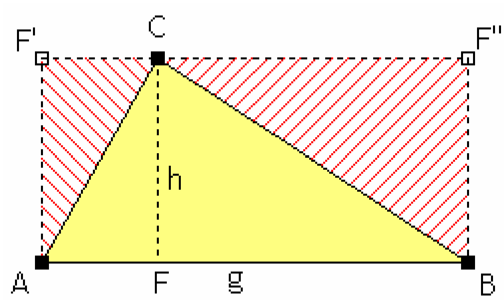


Für ein Quadrat mit der Seitenlänge a ergibt sich daraus
Die Fläche $A = a \cdot a = a^2$.

Ist beim Quadrat die Länge der Diagonalen gegeben,
so kann die Flächenformel des Drachens (Seite 2) verwendet werden.

Dreieck

Gesucht: Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

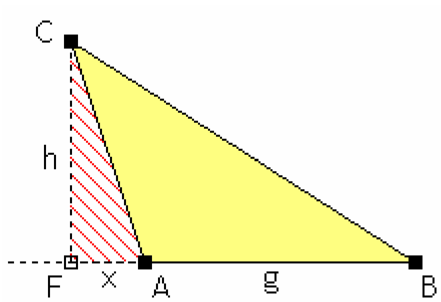


(1) Das Dreieck ABC lässt sich entlang der Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke AFC und FBC zerlegen. Drehe diese Dreiecke und lege sie wie in der Zeichnung wieder an das ursprüngliche Dreieck ABC an.

(2) Das entstandene Rechteck ABF''F' hat mit den Seitenlängen g und h die Fläche $A = g \cdot h$.

(3) Das Dreieck ABC ist genau halb so groß wie das Rechteck ABF''F' und hat daher die Fläche $A = \frac{g \cdot h}{2}$.

Die Flächenformel gilt auch für stumpfwinklige Dreiecke:



(1) Verlängere die Seite AB so, dass sich die Höhe h einzeichnen lässt.

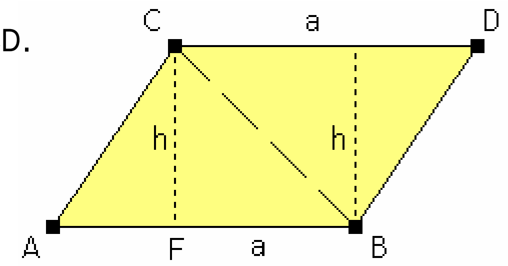
(2) Das Dreieck FAC hat mit Grundseite x und Höhe h die Fläche $A_1 = \frac{x \cdot h}{2}$.

(3) Das Dreieck FBC hat mit Grundseite x+g und Höhe h die Fläche $A_2 = \frac{(x+g) \cdot h}{2}$.

(4) Das gesuchte Dreieck ABC hat damit die Fläche

$$A = A_2 - A_1 = \frac{(x+g) \cdot h}{2} - \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x \cdot h + g \cdot h}{2} - \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x \cdot h}{2} + \frac{g \cdot h}{2} - \frac{x \cdot h}{2} = \frac{g \cdot h}{2}.$$

Parallelogramm



Gesucht: Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD.

Möglichkeit 1:

(1) Zerteile das Parallelogramm entlang einer Diagonalen in zwei Dreiecke.

(2) Beide Dreiecke haben mit Grundseite a und Höhe h die Fläche $A = \frac{a \cdot h}{2}$.

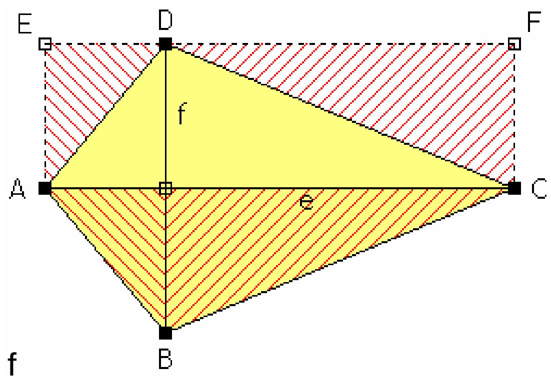
(3) Das Parallelogramm setzt sich aus den beiden gleich großen Dreiecken zusammen und hat deshalb die Fläche $A = 2 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = a \cdot h$.

Möglichkeit 2:

(1) Schneide das Dreieck AFC vom Parallelogramm ab und lege es an der Seite BD an.

(2) Das entstehende Rechteck ist genauso groß wie das ursprüngliche Parallelogramm, hat die Seitenlängen a und h und die Fläche $A = a \cdot h$.

Drachen



Gesucht: Flächeninhalt des Drachens ABCD.

Möglichkeit 1:

(1) Zerteile den Drachen entlang seiner beiden Diagonalen und setze die Teile zum Rechteck ACFE zusammen.

(2) Das Rechteck ACFE hat mit der Breite e und der Höhe $\frac{f}{2}$ die Fläche $A = e \cdot \frac{f}{2} = \frac{e \cdot f}{2}$.
Dies entspricht der Fläche des Drachens, da er sich aus den gleichen Teilen zusammen setzt wie das Rechteck.

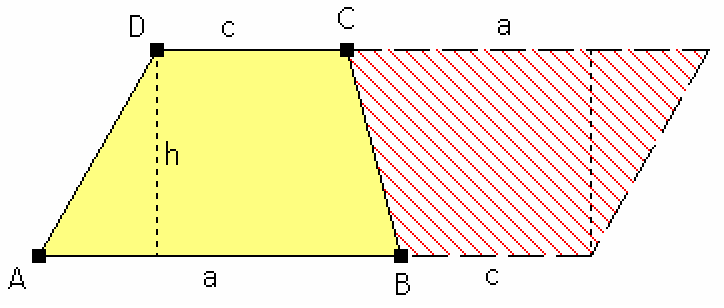
Möglichkeit 2:

(1) Zerteile den Drachen entlang der Diagonalen e in zwei Dreiecke.

(2) Beide Dreiecke haben mit Grundseite e und Höhe $\frac{f}{2}$ die Fläche $A = \frac{e \cdot f / 2}{2}$.

(3) Der Drachen setzt sich aus den beiden gleich großen Dreiecken zusammen und hat deshalb die Fläche $A = 2 \cdot \frac{e \cdot f / 2}{2} = e \cdot \frac{f}{2} = \frac{e \cdot f}{2}$

Trapez



Gesucht: Flächeninhalt des Trapezes ABCD.

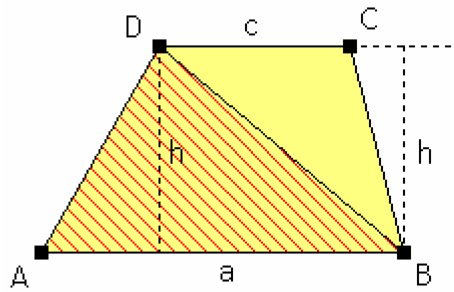
Möglichkeit 1:

(1) Drehe das Trapez um 180° und setze das gedrehte Trapez (schraffiert) an das ursprüngliche an.

(2) Beim entstandenen Parallelogramm haben die parallelen Seiten die Länge a+c. Die Höhe des Parallelogramms ist die gleiche wie die des ursprünglichen Trapezes. Für die Fläche des Parallelogramms gilt deshalb: $A = (a + c) \cdot h$.

(3) Das Trapez ABCD ist genau halb so groß wie das Parallelogramm. Für die Fläche ergibt sich also: $A = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$.

Möglichkeit 2:



(1) Zerlege das Trapez entlang einer Diagonalen in zwei Dreiecke.

(2) Das Dreieck ABD hat mit der Grundseite a und Höhe h die Fläche $A_1 = \frac{a \cdot h}{2}$.

(3) Das Dreieck BCD hat mit der Grundseite c und der Höhe h die Fläche $A_2 = \frac{c \cdot h}{2}$.

(4) Das Trapez ABCD setzt sich aus den Dreiecken ABD und BCD zusammen und hat deshalb die Fläche $A = A_1 + A_2 = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{c \cdot h}{2} = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$.

Raute

Je nachdem, welche Größen von der Raute gegeben sind, können zur Berechnung ihrer Fläche die Formeln des Drachens oder des Parallelogramms benutzt werden.

Unregelmäßige Vierecke und Vielecke

Unregelmäßige Vierecke und alle Vielecke mit mehr als vier Ecken lassen sich in die oben genannten Vierecke und/oder Dreiecke zerlegen und mit den bisherigen Formeln berechnen.