Mathematik

Name:	
Klasse:	Datum:

Gruppen, Körper und weitere algebraische Strukturen

Gruppen, Ringe, Körper und Co

Sei G eine nichtleere Menge.

Halb-gruppe	(1)	*Verknüpfung*	Jedem geordneten Paar $(a,b) \in G \times G$ ist eindeutig ein Element $c \in G$ zugeordnet. Wir schreiben: $c = a \circ b$.
	(2)	*Assotiativgesetz*	Für alle $a,b,c \in G$ gilt: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
Monoid	(3)	*Einselement*	Es gibt ein $e \in G$ mit $e \circ a = a \forall a \in G$.
Gruppe	(4)	*Inverses*	Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $b \circ a = e$.
abelsche Gruppe	(5)	*Kommutativges.*	Für alle $a,b \in G$ gilt $a \circ b = b \circ a$.

Sei R eine Menge.

	(1)	$(R,+)$ ist eine abelsche Gruppe. (neutr. Element: 0 ; inv. Element zu $a \in R$: $-a$)	
	(2)	Für alle $a,b,c \in R$ gelten die *Distributivgesetze*: $a(b+c) = ab + ac$ und $(a+b)c = ac + bc$.	
	(3)	$(R,*)$ ist Halbgruppe.	$R \setminus \{0\}$ ist eine Gruppe.
Ring	(4)	Es gibt ein Element $1 \in R \setminus \{0\}$ mit $1a = a = a1 \forall a \in R$.	
Schiefkörper	(5)	Zu jedem $a \in R \setminus \{0\}$ gibt es ein $b \in R \setminus \{0\}$ mit $ab = ba = 1$.	
Körper	(6)	Für alle $a,b \in R$ gilt $ab = ba$.	

Name:	
Klasse:	Datum:

Mathematik

Gruppen, Körper und weitere algebraische Strukturen

Definitionen und Axiome rund um Körper

1. Eine Menge *K* ist ein **Körper**, wenn zwei Abbildungen der folgenden Art gegeben sind:

   Addition: $K \times K \to K$: $(a,b) \to (a+b)$

   Multiplikation: $K \times K \to K$: $(a,b) \to (a \cdot b)$,

   so dass folgende Körperaxiome erfüllt sind:

   - $(K,+)$ ist eine abelsche Gruppe (die sog. **additive Gruppe**)
   - $(K \setminus \{0\},\cdot)$ ist eine abelsche Gruppe (die sog. **multiplikative Gruppe**)
   - Es gilt das **Distributivgesetz**: $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

2. Ein Körper $(K,+,\cdot)$ heißt **geordnet**, wenn eine Teilmenge $K^+ \subset K$ derart,
   dass die folgenden **Anordnungsaxiome** erfüllt sind:

   - Für jedes $a \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen:
     $a \in K^+$, $a = 0$, $a \in K^-$ bzw. $a > 0$, $a = 0$, $a > 0$.
   - $a \in K^+ ; b \in K^+ \Rightarrow a + b \in K^+$
   - $a \in K^+ ; b \in K^+ \Rightarrow a \cdot b \in K^+$

3. Ein *geordneter* Körper *K* heißt **vollständig** (= erfüllt das **Vollständigkeitsaxiom**),
   falls *jede nicht leere nach oben beschränkte* Teilmenge $\varnothing \neq A \subset K$
   ein Supremum $\sup(A) \subset K$ besitzt (,welches eindeutig bestimmt ist).

4. Ein *geordneter* Körper *K* heißt **archimedisch geordnet** (= erfüllt das A**rchimedische Axiom**),
   wenn zu jedem $a \in K^+$ und $b \in K$ stets natürliche Zahlen $n \in IN \subset K$ existieren mit: $b < n \cdot a$.

   Das Archimedische Axiom ist unabhängig von Körper- und Anordnungsaxiomen.