

Die PQ-Formel

Mit der PQ-Formel lassen sich quadratische Gleichungen lösen.

Gegeben ist zum Beispiel die Gleichung $x^2 + 6x - 7 = 0$
(oder ganz allgemein die Gleichung $x^2 + px + q = 0$).

Frage: Welcher Wert x erfüllt diese Gleichung?

Um dies herauszufinden, wird zunächst quadratisch ergänzt
und dann nach und nach x isoliert:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 6x - 7 = 0 & (1) \quad x^2 + px + q = 0 \\ x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - 7 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 0 & (2) \quad x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0 \\ x^2 + 6x + 9 - 16 = 0 & \\ (x + 3)^2 - 16 = 0 & (3) \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0 \\ (x + 3)^2 = 16 & (4) \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ x + 3 = \pm 4 & (5) \quad x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ x = -3 \pm 4 & (6) \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ x_1 = 1 & (7) \quad x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \\ x_2 = -7 & \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{array}$$

Die bei Schritt (6) rechts stehende Gleichung heißt PQ-Formel.