Name:	
Klasse:	Datum:

Mathematik

Produktintegration

Herleitung

<u>Vor.</u>: $u,v: \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}$ seien differenzierbare und integrierbare Funktionen.

<u>Beh.</u>: $\int u'(x)\cdot v(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx \forall x \in \mathrm{IR}.$

<u>Beweis:</u> Sei $x \in \mathrm{IR}$ beliebig und $f(x) = u(x)\cdot v(x)$.

Dann folgt mit der Produktregel: $f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$.

$$\Rightarrow \quad u(x)\cdot v(x) = f(x) = \int f'(x)dx = \int u'(x)\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \int u'(x)\cdot v(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx.$$

Aufgaben

Bestimme jeweils die Stammfunktion!

1. $f(x) = \ln(x) = 1\cdot\ln(x)$
2. $f(x) = x^3\cdot\ln(x).$
3. $f(x) = (x-9)^2\cdot e^{2x}$
4. $f(x) = \cos^2(x)$

Lösungen

Aufgabe 1

$$F(x) = \int \ln(x)dx = \int 1\cdot\ln(x)dx = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\cdot\ln(x) - \int 1\,dx = x\cdot\ln(x) - x$$

Aufgabe 2

$$F(x) = \int x^3\cdot\ln(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4\cdot\ln(x) - \int \frac{1}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{4}x^4\cdot\ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\cdot\ln(x) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}x^4$$

$$= 16\,x^4\,(\ln(x) - 1)$$

Aufgabe 3

$$F(x) = \int e^{2x}\cdot(x-9)^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot(x-9)^2 - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2\,(x-9)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot(x-9)^2 - \int e^{2x}\cdot(x-9)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cdot(x-9)^2 - \left(\frac{1}{2}e^{2x}\cdot(x-9) - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 1\,dx\right) = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot(x-9)^2 - \frac{1}{2}e^{2x}\cdot(x-9) + \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x}\left(2\cdot\left(x^2 - 18x + 81\right) - 2\cdot(x-9) + 1\right) = \frac{1}{4}e^{2x}\left(2x^2 - 38x + 179\right)$$

Aufgabe 4

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \cos(x)\cdot\cos(x)\,dx = \sin(x)\cdot\cos(x) - \int \sin(x)\cdot(-\sin(x))\,dz = \sin(x)\cdot\cos(x) + \int \sin^2(x)\,dz$$

$$= \sin(x)\cdot\cos(x) + \int 1 - \cos^2(x)\,dz = \sin(x)\cdot\cos(x) + x - \int \cos^2(x)\,dz$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\int \cos^2(x)\,dx = \sin(x)\cdot\cos(x) + x \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(\sin(x)\cdot\cos(x) + x)$$