Name:	
Klasse:	Datum:

Mathematik

Ebenen und ihre Gleichungen

Aus drei Punkten eine Ebenengleichung erstellen

Mit drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, ist eine Ebene eindeutig bestimmt.

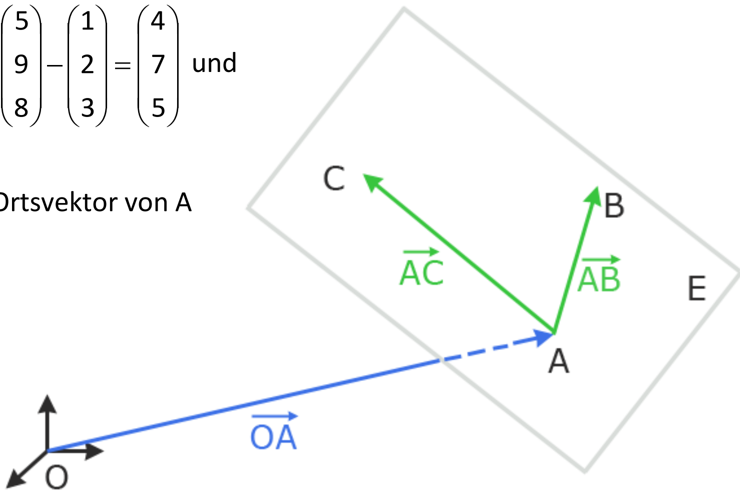
Gesucht ist eine Ebene, die die Punkte $A(1/2/3)$, $B(5/9/8)$ und $C(2/4/7)$ enthält.

Mit den Richtungsvektoren $\vec{r_1} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}5\\9\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix}$ und

$\vec{r_2} = \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ sowie dem Ortsvektor von A

lässt sich hieraus eine Parametergleichung

aufstellen: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$.



Darstellung von Ebenengleichungen

Man unterscheidet folgende Formen von Ebenengleichungen:

Parameterform	$E: \vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{r_1} + t\,\vec{r_2}$	$\vec{a}$	Stützvektor der Ebene
		$\vec{r_1}, \vec{r_2}$	Richtungsvektoren der Ebene
		s, t	Parameter
Koordinatenform	$E: s \cdot x + t \cdot y + u \cdot z = 1$	s, t, u	Parameter
Achsenabschnittsform	$E: \frac{x}{k} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$	k, m, n	Achsenabschnitte der Ebene
Normalenform	$E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$	$\vec{n}$	Normalenvektor der Ebene
	oder	$\vec{p}$	Ortsvektor eines bel. Punkts auf E
	$E: \vec{n} \cdot \vec{x} = s$	s	Skalarprodukt aus $\vec{n}$ und einem bel. Punkt auf der Ebene.
HESSEsche Normalenform	$E: \vec{n_0} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$	$\vec{n_0}$	Normalenvektor der Ebene mit der Länge 1
		$\vec{p}$	Ortsvektor eines bel. Punkts auf E

Bei allen Gleichungen ist $\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ die Variable.

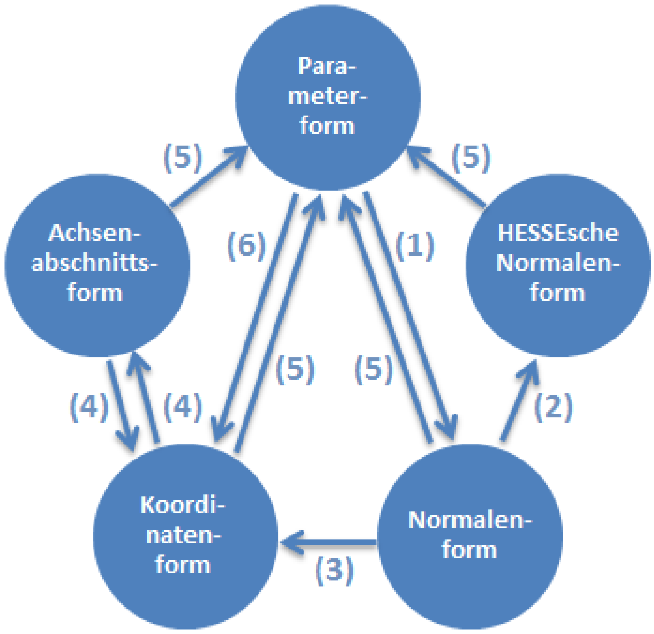
Autor: Ingo Ostwald (15.08.2016)

Mathematik

Ebenen und ihre Gleichungen

Name:	
Klasse:	Datum:

Umwandlung von Ebenengleichungen



(1) Umwandlung Parameterform $\rightarrow$ Normalenform

Der benötigte Normalenvektor ist das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren.
Als Punkt kann ein beliebiger Punkt gewählt werden, z.B. der bisherige Stützvektor.

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\-11\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad E:\begin{pmatrix}18\\-11\\1\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)=0\quad\Rightarrow\quad E:\begin{pmatrix}18\\-11\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=-1$$

(2) Umwandlung Normalenform $\rightarrow$ HESSEsche Normalenform

Der Normalenvektor muss auf die Länge 1 normiert (also durch seine Länge dividiert) werden.
Der vorher verwendete Punkt kann übernommen werden.

$$|\vec{n}|=\left|\begin{pmatrix}18\\-11\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{18^2+(-11)^2+1^2}=\sqrt{446}\quad\Rightarrow\quad\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\begin{pmatrix}18/\sqrt{446}\\-11/\sqrt{446}\\1/\sqrt{446}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad E:\begin{pmatrix}18/\sqrt{446}\\-11/\sqrt{446}\\1/\sqrt{446}\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)=0$$

(3) Umwandlung Normalenform $\rightarrow$ Koordinatenform

Das Skalarprodukt aus dem Normalenvektor und der Variablen wird aufgelöst.
Da bei der Koordinatenform hinter dem Gleichzeichen eine 1 stehen muss,
wird anschließend wird durch die Zahl hinter dem Gleichzeichen dividiert.

$$E:\begin{pmatrix}18\\-11\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=-1\quad\Leftrightarrow\quad E:18x-11y+1z=-1\quad\Leftrightarrow\quad E:-18x+11y-1z=1$$

Name:	
Klasse:	Datum:

Mathematik

Ebenen und ihre Gleichungen

(4) Umwandlung Koordinatenform ↔ Achsenabschnittsform

Die Koordinatenform wird so umgeschrieben, dass x, y und z alleine im Zähler stehen.
Zwischen den Brüchen müssen Plus-Zeichen stehen!

$$E: 18x - 11y + 1z = -1 \quad \Leftrightarrow \quad E: \frac{x}{-\frac{1}{18}} + \frac{y}{\frac{1}{11}} + \frac{z}{-1} = 1$$

Hinweis: Daraus ergeben sich die Achsenschnittpunkte $S_x(-1/18 \mid 0 \mid 0)$, $S_y(0 \mid 1/11 \mid 0)$ und $S_z(0 \mid 0 \mid -1)$ der Ebene mit den Koordinatenachsen.

(5) Umwandlung in die Parameterform

Wähle drei beliebige Punkte, die auf der Ebene liegen, und erstelle eine Parametergleichung.
Dabei spielt es keine Rolle, welcher Punkt als Stützvektor verwendet wird.

A	B	C	Ebenengleichung in Parameterform
$(1 \mid 2 \mid 3)$	$(0 \mid 0 \mid -1)$	$(11 \mid 18 \mid -1)$	$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ -4 \end{pmatrix}$
(leicht ablesbar aus der Normalenform)			
$S_z(0 \mid 0 \mid -1)$	$S_x(-1/18 \mid 0 \mid 0)$	$S_y(0 \mid 1/11 \mid 0)$	$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1/18 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/11 \\ 1 \end{pmatrix}$
(berechnete Achsenabschnittspunkte)			
$(0{,}5 \mid 1 \mid 1)$	$(-1 \mid 1 \mid 28)$	$(1 \mid 0 \mid -19)$	$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \\ -20 \end{pmatrix}$
(leicht ablesbar aus der Koordinatenform)			

(6) Umwandlung Parameterform → Koordinatenform

Schreibe die Parametergleichung zeilenweise als Gleichungssystem.
Eliminiere dann die beiden Parameter s und t durch Addition/Subtraktion der Gleichungen.
Übrig bleibt die Koordinatenform der Ebene.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} x = 1 + 4s + 1t \\ y = 2 + 7s + 2t \\ z = 3 + 5s + 4t \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 4x = 4 + 16s + 4t \\ 2y = 4 + 14s + 4t \\ z = 3 + 5s + 4t \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{c} 4x - 2y = 2s \\ 4x - z = 1 + 11s \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 44x - 22y = 22s \\ 8x - 2z = 2 + 22s \end{array} \right| \Rightarrow 36x - 22y + 2z = -2 \Rightarrow -18x + 11y - 1z = 1$$

Hinweis: Diese Rechnung kann über die Wege (1) und (3) vermieden werden!