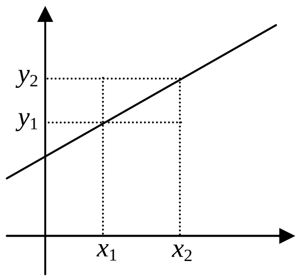
Einführung in die Differentialrechnung

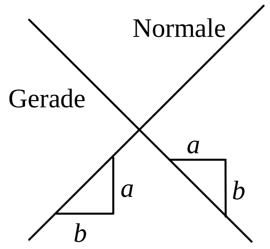
Die Steigung einer Geraden



Die Steigung m_g einer Geraden g läßt wie folgt berechnen:

$$m_g = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

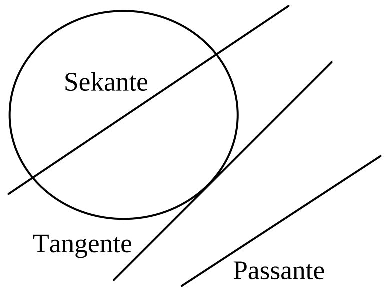
Die Steigung einer Normalen



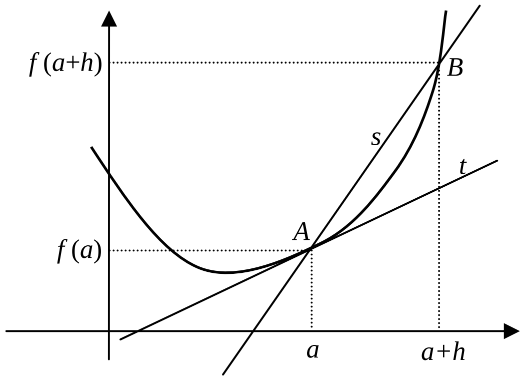
Die Steigung einer Normalen (Senkrechten) zu einer Geraden ist genau der Kehrwert der Geradensteigung:

$$m_g = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad m_n = \frac{1}{m_g} = \frac{b}{a}$$

Wichtige Begriffe



Eine Sekante berührt einen Kreis (oder ein Kurvenstück) genau zweimal, eine Tangente genau einmal, eine Passante gar nicht.



gegeben: Eine Funktion f und ein Punkt $A(a, f(a))$.

gesucht: Die Steigung der Funktion f im Punkt A.

Definition: Die Steigung einer Funktion in einem Punkt ist die Steigung der Tangenten an die Funktion durch diesen Punkt.

Problem: Um die Aufgabe zu lösen, muß die Tangentensteigung bestimmt werden. Von dieser Tangenten ist jedoch nur ein Punkt bekannt, durch den sie verläuft. Um eine Gerade eindeutig festlegen zu können, braucht man aber zwei Punkte.

Ansatz: Wähle einen beliebigen weiteren Punkt B auf dem Funktionsgraphen, dessen x-Wert einen bestimmten Abstand h von a hat. Dieser Punkt hat dann die Koordinaten $B(a+h \mid f(a+h))$. Die Gerade AB ist dann Sekante des Graphen. Da von dieser zwei Punkte bekannt sind, läßt sich die Steigung berechnen: $\boxed{m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$.

Der Trick ist nun folgender: Der Punkt B wird in Richtung A verschoben, der Abstand h zwischen den x-Werten von A und B wird also verkleinert. Dabei nähert sich die Sekanten nach und nach der Tangenten an. Wird der Punkt B so weit verschoben, daß er mit A übereinstimmt, so läuft h gegen Null und die Sekante wird zur Tangenten.

Lösung: Gemäß obigem Ansatz ergibt die Gleichung für die Sekantensteigung für $h \to 0$ eine Formel für die Tangentensteigung: $\boxed{m_t = \lim_{h \to 0} m_s = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

Beispiel: Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$, gesucht ist ihre Steigung in $a = 2$.

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} \left(3a^2 + 3ah + h^2\right) = 3a^2$$

An der Stelle $a = 2$ hat die Funktion somit eine Steigung von $3 \cdot a^2 = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Wie an diesem Beispiel zu sehen ist, kommt es darauf an, den Bruch so umzuformen, daß das h im Nenner verschwindet. Dann kann der Limes für $h \to 0$ problemlos berechnet werden, in dem statt h einfach 0 eingesetzt wird.