Primfaktorzerlegung bei Funktionen

❶

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

a) Berechne die Nullstellen.
b) Zeige, dass sich f in der Form $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ darstellen lässt.

❷

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

a) Berechne die Nullstellen.
b) Zeige, dass sich f in der Form $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$ darstellen lässt.

❸

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^4 - 13x + 36$.

c) Berechne die Nullstellen.
d) Zeige, dass sich f in der Form $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$ darstellen lässt.

❹

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$.

a) Berechne die Nullstellen.
Nach geschickter Vereinfachung solltest du folgende Lösungen erhalten:
$x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$ und $x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$
b) Zeige, dass sich f in der Form $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$ darstellen lässt.

Lösung zu Aufgabe ❶

a) Die Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ lässt sich mit der pq-Formel lösen:

$$x_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2},$$

also $x_1 = \frac{6}{2} = 3$ und $x_1 = \frac{4}{2} = 2$.

<u>oder</u>

$x_{1/2} = 2.5 \pm \sqrt{6.25 - 6} = 2.5 \pm \sqrt{0.25} = 2.5 \pm 0.5$, also $x_1 = 3$ und $x_2 = 2$.

b) $(x-3) \cdot (x-2) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6$

$\Rightarrow \quad f(x) = (x-3) \cdot (x-2)$
bzw. $\quad f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Lösung zu Aufgabe ❷

a) Die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ ist zu lösen.

Hierfür muss eine Nullstelle „geraten“ werden.

Wegen $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ ist $x_1 = 1$ eine Nullstelle.

Daraus und aus der Zerlegbarkeit von Funktionen in ihre Primfaktoren folgt, dass es eine Funktion $g(x)$ geben muss mit $f(x) = (x - x_1) \cdot g(x) = (x-1) \cdot g(x)$.

$\Rightarrow \quad g(x) = f(x) : (x-1) = (x^3 - 6x^2 + 11x - 9) : (x-1) = x^2 - 5x + 6$

Das letzte Gleichzeichen ergibt sich aus folgender Polynomdivision:

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & -6x^2 & +11x & -6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{x^3} & \underline{-x^2} & & \\
 & -5x^2 & +11x & \\
 & \underline{-5x^2} & \underline{+5x} & \\
 & & 6x & -6 \\
 & & \underline{6x} & \underline{-6} \\
 & & & 0
\end{array}$$

Nach Aufgabe 1 hat $g(x)$ die Nullstellen 2 und 3.

Damit ergeben sich als Nullstellen von $f(x)$:
$x_1 = 1$ (geraten und nachgerechnet),
$x_2 = 2$ und $x_3 = 3$ (in Aufgabe 1 berechnet)

b) $\Rightarrow \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1) \cdot (x^2 - 13x + 36) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$
bzw. $\quad f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$

Lösung zu Aufgabe ❸

a) Die Gleichung $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ ist zu lösen.

Setze $z = x^2$.

Dann lässt sich die Gleichung als $z^2 - 13z + 36 = 0$ schreiben und mit der pq-Formel lösen:

$$z_{1/2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{144}{4}} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2},$$

also $z_1 = \frac{18}{2} = 9$ und $z_2 = \frac{8}{2} = 4$.

$$z = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{z}$$

Für die gesuchten Nullstellen ergibt sich damit:

$$x_1 = +\sqrt{z_1} = +\sqrt{9} = 3 \qquad x_2 = -\sqrt{z_1} = -\sqrt{9} = -3$$
$$x_3 = \sqrt{z_2} = \sqrt{4} = 2 \qquad x_4 = -\sqrt{z_2} = -\sqrt{4} = -2$$

b) $(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$

x_1, x_2, x_3 und x_4 einsetzen

$= (x - 3) \cdot (x - (-3)) \cdot (x - 2) \cdot (x - (-2))$

Faktoren vereinfachen

$= (x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$

3. Binomischen Formel anwenden

$= (x^2 - 9) \cdot (x^2 - 4)$

Ausmultiplizieren

$= x^4 - 4x^2 - 9x^2 + 36$

Zusammenfassen

$= x^4 - 13x^2 + 36$

$\Rightarrow \quad f(x) = (x-3) \cdot (x+3) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$

bzw. $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$

Lösung zu Aufgabe ❹

a) Die Gleichung $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ ist zu lösen.

Setze $z = x^2$.

Dann lässt sich die Gleichung als $z^2 - 10z + 1 = 0$ schreiben und mit der pq-Formel lösen:

$$z_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25 - 1} = 2 \pm \sqrt{24} + 3 = 2 \pm 2\sqrt{6} + 3 = \sqrt{2}^2 \pm 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = \left(\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\right)^2$$

$$z = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{z}$$

Für die gesuchten Nullstellen ergibt sich damit:

$$x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{z_{1/2}} = \pm\sqrt{\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\right)^2} = \pm\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\right)^2$$, also

$$x_1 = +\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{3} \qquad x_2 = +\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$x_3 = -\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{3} \qquad x_4 = -\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

b) $$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$$

x_1, x_2, x_3 und x_4 einsetzen

$$= \left(x - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(x - \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(x - \left(-\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(x - \left(-\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right)$$

Faktoren vertauschen

$$= \left(x - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(x - \left(-\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(x - \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(x - \left(-\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right)$$

Faktoren vereinfachen

$$= \left(x - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(x + \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(x - \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(x + \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right)$$

3. Binomischen Formel anwenden

$$= \left(x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2\right) \cdot \left(x^2 - \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2\right)$$

Links 1. und rechts 2. Binomischen Formel anwenden

$$= \left(x^2 - \left(2 + 2\sqrt{6} + 3\right)\right) \cdot \left(x^2 - \left(2 - 2\sqrt{6} + 3\right)\right)$$

Terme zusammenfassen

$$= \left(x^2 - \left(5 + 2\sqrt{6}\right)\right) \cdot \left(x^2 - \left(5 - 2\sqrt{6}\right)\right)$$

Terme vereinfachen

$$= \left(x^2 - 5 - 2\sqrt{6}\right) \cdot \left(x^2 - 5 + 2\sqrt{6}\right)$$

Klammern setzen (nur zur Veranschaulichung)

$$= \left(\left(x^2 - 5\right) - 2\sqrt{6}\right) \cdot \left(\left(x^2 - 5\right) + 2\sqrt{6}\right)$$

3. Binomischen Formel anwenden

$$= \left(x^2 - 5\right)^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2$$

2. Binomischen Formel anwenden

$$= x^4 - 10x^2 + 25 - 4 \cdot 6$$

Terme zusammenfassen

$$= x^4 - 10x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \left(x - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(x - \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(x - \left(-\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(x - \left(-\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right)$$

bzw. $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$