Name:	
Klasse:	Datum:

Mathematik

Abstände berechnen

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Aufgabe

Bestimme den Abstand des Punktes $P(9/21/10)$ von der Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$.

Lösungsidee

1. Finde eine Ebene E, die orthogonal zu g steht und durch P verläuft.
2. Schneide E und g, um den Lotfußpunkt L von P auf g zu erhalten.
3. Bestimme den Abstand von P und L.

Lösung

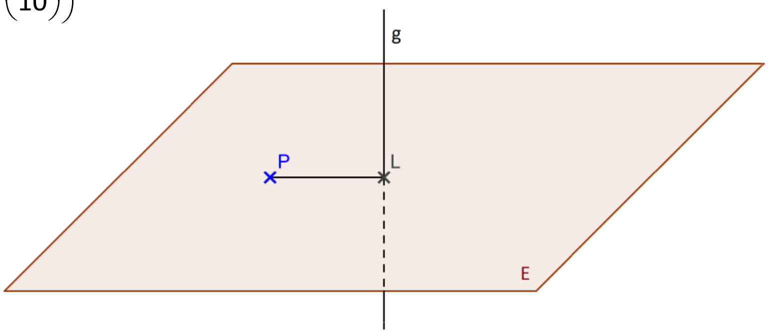
1. Bestimme die Gleichung einer zu g orthogonalen Ebene E, die durch den Punkt P verläuft.

Verwende P als Stützvektor und den Richtungsvektor der Geraden g als Normalenvektor von E.

$$E:\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{p})=0 \quad\Leftrightarrow\quad E:\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}9\\21\\10\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad E:\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\21\\10\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad E:\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-138=0$$



2. Berechne den Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g. Dieser ist der Lotfußpunkt L von P.

$$\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}\right)-138=0 \quad\Leftrightarrow\quad 26+56s-138=0 \quad\Leftrightarrow\quad s=2$$

$$\Rightarrow\quad \vec{l}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\\15\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad L(9/6/15)$$

3. Berechne die Länge des Vektors $\overrightarrow{PL}$. Diese Länge ist der gesuchte Abstand.

$$\left|\overrightarrow{PL}\right|=\left|\begin{pmatrix}9\\6\\15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9\\21\\10\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\-15\\5\end{pmatrix}\right|=\sqrt{0+225+25}=5\sqrt{10}\approx 15{,}81$$

Autor: Ingo Ostwald (15.08.2016)

Name:	
Klasse:	Datum:

Abstände berechnen

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Aufgabe

Bestimme den Abstand des Punktes $P(2/0/-1)$ von der Ebene $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\7\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\6\\2\end{pmatrix}$.

Lösungsidee

1. Finde eine Gerade g, die orthogonal zu E steht und durch P verläuft.
2. Schneide E und g, um den Lotfußpunkt L von P auf g zu erhalten.
3. Bestimme den Abstand von P und L.

Lösung

1. Bestimme die Gleichung einer zu E orthogonalen Geraden g, die durch den Punkt P verläuft.

Verwende P als Stützvektor und den Normalenverktor der Ebene als Richtungvektor.

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}$$

2. Berechne den Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g. Dieser ist der Lotfußpunkt L von P.

Schreibe zunächst die Ebene E in Normalenform:

$$E:\vec{n}\cdot\left(\vec{x}-\vec{p}\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad E:\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\7\\-2\end{pmatrix}\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad E:\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}\vec{x}+252=0$$

Berechne nun den Schnittpunkt von E und g:

$$\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}\right)+252=0\quad\Leftrightarrow\quad -59+965t+252=0\quad\Leftrightarrow\quad t=-\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{l}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6{,}4\\3{,}2\\-4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad L\left(6{,}4/3{,}2/-4\right)$$

3. Berechne die Länge des Vektors $\overrightarrow{PL}$. Diese Länge ist der gesuchte Abstand.

$$\left|\overrightarrow{PL}\right|=\left|\begin{pmatrix}6{,}4\\3{,}2\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4{,}4\\3{,}2\\-3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{19{,}36+10{,}24+9}=\sqrt{38{,}6}\approx 6{,}21$$

Name:	
Klasse:	Datum:

Mathematik

Abstände berechnen

Abstand zwischen parallelen Ebenen

Aufgabe

Bestimme den Abstand der Ebenen $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\7\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\6\\2\end{pmatrix}$ und $F:\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\-15\\90\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-17\\29\\6\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\-9\\8\end{pmatrix}$.

Lösungsidee

Liegen zwei Ebenen E und F parallel zu einander, haben alle Punkte von F den gleichen Abstand zu E. Wähle daher einen beliebigen Punkt P der Ebene F aus (z.B. den Stützvektor) und berechne dann (wie oben gezeigt) den Abstand zwischen P und E.

Lösung

1. Finde die Gerade g, die orthogonal zu E steht und durch den Stützvektor von F verläuft.

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix} \Rightarrow g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\-15\\90\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}$$

2. Berechne den Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g. Dieser ist der Lotfußpunkt L von P.

Schreibe zunächst die Ebene E in Normalenform:

$$E:\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{p})=0 \Leftrightarrow E:\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\7\\-2\end{pmatrix}\right)=0 \Leftrightarrow E:\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}\vec{x}+252=0$$

Berechne nun den Schnittpunkt von E und g:

$$\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}-4\\-15\\90\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}\right)+252=0 \Leftrightarrow 1678+965t+252=0 \Leftrightarrow t=-2$$

$$\Rightarrow \vec{l}=\begin{pmatrix}-4\\-15\\90\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}-22\\-16\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\17\\60\end{pmatrix} \Rightarrow L(40/17/60)$$

3. Berechne die Länge des Vektors $\overrightarrow{PL}$. Diese Länge ist der gesuchte Abstand.

$$\left|\overrightarrow{PL}\right|=\left|\begin{pmatrix}40\\17\\60\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\-15\\90\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}44\\32\\-30\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1936+1024+900}=\sqrt{3860}\approx 62{,}13$$

Abstände berechnen

Name:	
Klasse:	Datum:

Abstand zwischen windschiefen oder parallelen Geraden

Aufgabe

Bestimme den Abstand der beiden Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$.

Lösungsidee

Finde zwei zueinander parallele Ebenen E und F, sodass E die Gerade g und F die Gerade h enthält und bestimme (wie oben gezeigt) ihren Abstand.

Lösung

1. **Bestimme einen Vektor, der zu den Richtungsvektoren beider Geraden senkrecht ist und stelle mit diesem Vektor und den Stützvektoren der Geraden Ebenengleichungen auf.**

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\-10\\-4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad E:\begin{pmatrix}-15\\-10\\-4\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad E:\begin{pmatrix}-15\\-10\\-4\end{pmatrix}\vec{x}+20=0$$

$$\text{und}\quad F:\begin{pmatrix}-15\\-10\\-4\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad F:\begin{pmatrix}-15\\-10\\-4\end{pmatrix}\vec{x}+30=0$$

2. **Wähle einen Punkt P auf F und bestimme seinen Abstand zu E.**

Die Gerade $k:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-15\\-10\\-4\end{pmatrix}$ ist senkrecht zu E und F und verläuft durch $P(2/0/0)\in F$.

Damit lassen sich der Lotfußpunkt L und der Abstand zwischen P und L berechnen. Dieser Abstand ist gleichzeitig der Abstand der beiden Ebenen E und F und der beiden Geraden g und h!

$$\begin{pmatrix}-15\\-10\\-4\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-15\\-10\\-4\end{pmatrix}\right)+20=0\quad\Leftrightarrow\quad -30+341t+20=0\quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{10}{341}$$

$$\Rightarrow\quad\vec{l}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{10}{341}\cdot\begin{pmatrix}-15\\-10\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}532/341\\-100/341\\-40/341\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad L\left(\frac{532}{341}\middle|-\frac{100}{341}\middle|-\frac{40}{341}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{PL}\right|=\left|\begin{pmatrix}532/341\\-100/341\\-40/341\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-150/341\\-100/341\\-40/341\end{pmatrix}\right|=\sqrt{\left(-\frac{150}{341}\right)^2+\left(-\frac{100}{341}\right)^2+\left(-\frac{40}{341}\right)^2}=\frac{10}{\sqrt{341}}\approx 0,54$$