

WANTED – FUNKTION GESUCHT

STECKBRIEFAUFGABEN

Aufgabe ①:

Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse, geht durch den Ursprung des Koordinatensystems und schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 3$ mit der Steigung $m = -48$.

Bestimme die Funktionsgleichung.

Aufgabe ②:

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat an der Stelle $x = -1$ eine Extremstelle. Er schneidet die Ordinatennachse mit der Ordinate $y = 2$ und berührt die x-Achse an der Stelle $x = 2$.

Bestimme die Funktionsgleichung.

Lösung von Aufgabe ①:

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades, also $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Da f achsensymmetrisch sein soll, können gilt $b = d = 0$, also $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$.

Für die Ableitungen gilt dann $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$.

Die Funktion f geht durch den Ursprung des Koordinatensystems, also durch den Punkt $O(0/0)$, damit gilt $f(0) = 0$.

Die Funktion f schneidet die x -Achse an der Stelle $x = 3$, geht also durch den Punkt $P(3/0)$, damit gilt: $f(3) = 0$.

Die Funktion f hat an der Stelle $x = 3$ die Steigung $m = -48$, damit gilt: $f'(3) = -48$.

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\Rightarrow e = 0 \\ f(3) = 0 &\Rightarrow 81a + 9c + e = 0 \\ f'(3) = -48 &\Rightarrow 108a + 6c = -48 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} 81a + 9c = 0 & : 3 \\ 108a + 6c = -48 & : 2 \\ \hline 27a + 3c = 0 & \\ 54a + 3c = -24 & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 81a + 9c = 0 \\ 108a + 6c = -48 \end{array}} \right\} -$$

$$-27a = 24 \Leftrightarrow a = -\frac{24}{27} = -\frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow 27\left(-\frac{8}{9}\right) + 3c = 0 \Leftrightarrow 3c = 24 \Leftrightarrow c = 8$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{8}{9}x^4 + 8x^2$$

Lösung von Aufgabe ②:

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, also $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Für die Ableitungen gilt dann $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Die Funktion f hat an der Stelle $x = -1$ eine Extremstelle, damit gilt $f'(-1) = 0$.

Die Funktion f schneidet die Ordinatenachse bei $y = 2$ geht also durch den Punkt $P(0/2)$, damit gilt $f(0) = 2$.

Die Funktion f berührt die x-Achse an der Stelle $x = 2$, geht also durch den Punkt $P(2/0)$, damit gilt: $f(2) = 0$.

Die Funktion f schneidet die x-Achse nicht, sondern berührt sie nur an der Stelle $x = 2$, hat also dort eine waagrechte Tangente, damit gilt: $f'(2) = 0$.

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow d = 2$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} 6a - 4b + 2c = 0 \\ 8a + 4b + 2c = -2 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} [1] + [2]: \\ [2] + [3]: \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 14a + 4c = -2 \\ -4a + c = -2 \end{array} \right| \quad | \cdot 4$$

$$\left| \begin{array}{l} 14a + 4c = -2 \\ -16a + 4c = -8 \end{array} \right| \quad [1] - [2]: \quad 30a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$14 \cdot \frac{1}{5} + 4c = -2 \Leftrightarrow 14 + 20c = -10 \Leftrightarrow c = -\frac{24}{20} = -\frac{6}{5}$$

$$3 \cdot \frac{1}{5} - 2b - \frac{6}{5} = 0 \Leftrightarrow 3 - 10b - 6 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{10}x^2 - \frac{6}{5}x + 2$$