

Rechnen mit Binomialkoeffizienten

Name:	
Klasse:	Datum:

Definition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe

Gesucht sind die Werte der folgenden Binomialkoeffizienten: $\binom{70}{66}$, $\binom{70}{4}$ und $\binom{70}{35}$.

Das Problem hierbei ist, dass die meisten Taschenrechner nur bis $69!$ rechnen können, da $70!$ schon mehr als 100 Stellen hat. Deshalb benötigt man zur Berechnung obiger Koeffizienten einige Rechenricks...

Lösungsansätze

(1) Vor dem Ausrechnen kann gekürzt werden:

$$\binom{70}{66} = \frac{70!}{66!4!} = \frac{70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67 \cdot 66!}{66!4!} = \frac{70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \cdot 23 \cdot 17 \cdot 67 = 916895$$

In diesem Beispiel wurde mit $66!$ gekürzt.

(2) Das Kürzen vor dem Ausrechnen ist leider nur dann nützlich, wenn n nicht sehr viel größer ist als k , da im Zähler das Produkt von $(n-k)$ Faktoren stehen bleibt.

Bei $\binom{70}{4}$ bliebe also das Produkt von 66 Faktoren übrig. Beweise daher zunächst folgende Formel:

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{b-a} \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

Warum kann man jetzt das Ergebnis ohne weitere Rechnung angeben?

(3) Bei der Berechnung von $\binom{70}{35}$ bleiben sowohl beim Kürzen vor dem Ausrechnen, als auch bei Anwendung der Formel aus (2) 35 Faktoren übrig, die man multiplizieren müsste.

Beweise zunächst, dass folgende Formel gilt:

$$a \cdot \binom{a}{b} = b \cdot \binom{a-1}{b-1} \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

Berechne mit Hilfe dieser Formel den gesuchten Binomialkoeffizienten.

