

Potenzgesetze

Name:	
Klasse:	Datum:

Potenzen mit gleichen Exponenten

- (1) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.

$$4^3 \cdot 5^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 = (4 \cdot 5)^3$$

- (2) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten beibehält.

$$\frac{4^3}{5^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

- (3) $a^n \pm b^n \neq (a \pm b)^n$ Eine Regel für die Addition oder Subtraktion von Potenzen mit gleichen Exponenten und unterschiedlichen Basen gibt es nicht!

$$4^3 + 5^3 = 64 + 125 = 189 \neq 729 = 9^3 = (4 + 5)^3$$

Potenzen mit gleichen Basen

- (4) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Basis beibehält und die Exponenten addiert.

$$4^2 \cdot 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 4^{2+3}$$

- (5) $\frac{a^n}{a^m} = a^{m-n}$ Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Basis beibehält und die Exponenten subtrahiert.

$$\frac{4^5}{4^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} = 4 \cdot 4 = 4^2 = 4^{5-3}$$

- (6) $a^n \pm a^m = a^n \pm a^m$ Eine Regel für die Addition oder Subtraktion von Potenzen mit unterschiedlichen Exponenten und gleicher Basis gibt es nicht!

Potenzen potenzieren

- (7) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis beibehält und die Exponenten multipliziert.

$$(4^3)^2 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^6 = 4^{3 \cdot 2}$$



Potenzgesetze

Name:	
Klasse:	Datum:

Potenzen mit negativen Exponenten

(8)
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 8 & \stackrel{:2}{\rightarrow} & 4 & \stackrel{:2}{\rightarrow} & 2 & \stackrel{:2}{\rightarrow} & 1 & \stackrel{:2}{\rightarrow} & \frac{1}{2} & \stackrel{:2}{\rightarrow} & \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} & \stackrel{:2}{\rightarrow} & \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \\
 = & & = & & = & & = & & = & & = & & = \\
 2^3 & \stackrel{:2}{\rightarrow} & 2^2 & \stackrel{:2}{\rightarrow} & 2^1 & \stackrel{:2}{\rightarrow} & 2^0 & \stackrel{:2}{\rightarrow} & 2^{-1} & \stackrel{:2}{\rightarrow} & 2^{-2} & \stackrel{:2}{\rightarrow} & 2^{-3}
 \end{array}$$

Aus Regel (8) und den Regeln der Bruchrechnung folgen:

(8a)
$$b \cdot a^{-n} = \frac{b}{a^n}$$

$$2x^{-3} = 2 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

(8b)
$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$$\frac{1}{2^{-3}} = 1 : 2^{-3} = \frac{1}{1} : \frac{1}{2^3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2^3}{1} = \frac{2^3}{1} = 2^3$$

(8c)
$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

$$\frac{2^{-3}}{4^{-5}} = 2^{-3} : 4^{-5} = \frac{1}{2^3} : \frac{1}{4^5} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{4^5}{1} = \frac{4^5}{2^3}$$

Potenzen mit gebrochenen Exponenten

(9)
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} = 2 = 2^1 = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

Daraus ergibt sich: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

Aus Regel (8), den vorherigen Regeln und den Regeln der Bruchrechnung folgen:

(9a)
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$5^{\frac{3}{4}} = 5^{3 \cdot \frac{1}{4}} = (5^3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$$

(9b)
$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$5^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5^3}}$$

(9c)
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 2^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^{3+4}}$$



Potenzgesetze

Name:	
Klasse:	Datum:

Aufgaben

Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

Schreibe alle Ergebnisse ohne gebrochene oder negative Exponenten.

a) $x^{-2} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[4]{6^3} \cdot \sqrt[5]{6^2}$

c) $x \cdot \sqrt[4]{x^5}$

d) $\frac{(xy)^{-5} \cdot x^6}{x^8 \cdot y^{-3}}$

e) $\frac{a^{-5} \cdot b^6 \cdot c^{-7}}{a^8 \cdot b^4 \cdot c^{-3}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{2^4} \cdot 5^7 \cdot 3^{-7} \cdot 2^{\frac{5}{12}}}{3^{-8} \cdot 5^4 \cdot \sqrt[4]{2^3}}$

g) $5x^{-3} : (5x)^{-3}$

h) $0,4\sqrt[9]{9^3}$

i) $\sqrt[{\frac{2}{3}}]{\frac{7}{6^4}}$

Lösungen zu den Aufgaben

a) $x^{-2} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{-2+\frac{2}{3}} = x^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{x \sqrt[3]{x}}$

b) $\sqrt[4]{6^3} \cdot \sqrt[5]{6^2} = 6^{\frac{3}{4}} \cdot 6^{\frac{2}{5}} = 6^{\frac{15}{20}} \cdot 6^{\frac{8}{20}} = 6^{\frac{15+8}{20}} = 6^{\frac{23}{20}} = \sqrt[20]{6^{23}}$

c) $x \cdot \sqrt[4]{x^5} = x^1 \cdot x^{\frac{5}{4}} = x^{1+\frac{5}{4}} = x^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{x^9} = x^2 \sqrt[4]{x}$

d) $\frac{(xy)^{-5} \cdot x^6}{x^8 \cdot y^{-3}} = \frac{x^{-5} \cdot y^{-5} \cdot x^6}{x^8 \cdot y^{-3}} = \frac{x^6 \cdot y^3}{x^5 \cdot x^8 \cdot y^5} = \frac{x^6 \cdot y^3}{x^{13} \cdot y^5} = \frac{1}{x^7 y^2}$

e) $\frac{a^{-5} \cdot b^6 \cdot c^{-7}}{a^8 \cdot b^4 \cdot c^{-3}} = \frac{b^6 \cdot c^3}{a^5 \cdot a^8 \cdot b^4 \cdot c^7} = \frac{b^2}{a^{13} \cdot c^4}$

f) $\frac{\sqrt[3]{2^4} \cdot 5^7 \cdot 3^{-7} \cdot 2^{\frac{5}{12}}}{3^{-8} \cdot 5^4 \cdot \sqrt[4]{2^3}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{12}} \cdot 3^8 \cdot 5^7}{2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^7 \cdot 5^4} = \frac{2^{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}-\frac{3}{4}} \cdot 3 \cdot 5^3}{1} = 2^1 \cdot 3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 3 \cdot 125 = 750$

g) $5x^{-3} : (5x)^{-3} = \frac{5^1 \cdot x^{-3}}{5^{-3} \cdot x^{-3}} = \frac{5^1}{5^{-3}} = 5^{1-(-3)} = 5^4 = 625$

h) $0,4\sqrt[9]{9^3} = 9^{0,4} = 9^{\frac{30}{4}} = 9^{\frac{15}{2}} = \sqrt{9^{15}} = 3^{15} = 14348907$

i) $\sqrt[{\frac{2}{3}}]{\frac{7}{6^4}} = \left(6^{\frac{7}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(6^{\frac{7}{4}}\right)^{-\frac{3}{2}} = 6^{\frac{7}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = 6^{-\frac{21}{8}} = \frac{1}{6^{\frac{21}{8}}} = \frac{1}{\sqrt[8]{6^{21}}}$

